

Złożone chaotyczne szeregi czasowe

1. Wprowadzenie

Zjawiska zachowania chaotycznego obserwowane w świecie rzeczywistym i jego modelach matematycznych związane są z charakterem dynamiki badanego systemu. Najogólniej mówiąc oznacza to występowanie w rozpatrywanym systemie przebiegów pewnych zmiennych opisujących jego zachowanie, które cechuje bardzo nieregularny kształt (Kendall, 2002, s. 210). Przebiegi te są bardzo trudne do przewidywania w długim horyzoncie czasowym, natomiast są dobrze przewidywalne w krótkich przedziałach czasu. Z reguły systemy dynamiczne zachowujące się w sposób chaotyczny cechuje dużą wrażliwość na warunki początkowe wyznaczające punkt startowy trajektorii ewolucji systemu (Tempczyk, 2002, s. 68; Dorfman, 2001, s. 69). Stanowi to zwykle główną przyczynę nieprzewidywalności zachowań systemu chaotycznego w dłuższych odcinkach czasu. Mówiąc o chaosie deterministycznym mamy na myśli system posiadający w pełni zdeterminizowaną dynamikę, w którym jednak obserwowane jest zachowanie chaotyczne. Jednym z warunków koniecznych pojawienia się przebiegów chaotycznych w systemie deterministycznym jest nieliniowość zależności występujących w tym systemie.

2. Chaos w prostych modelach nieliniowych

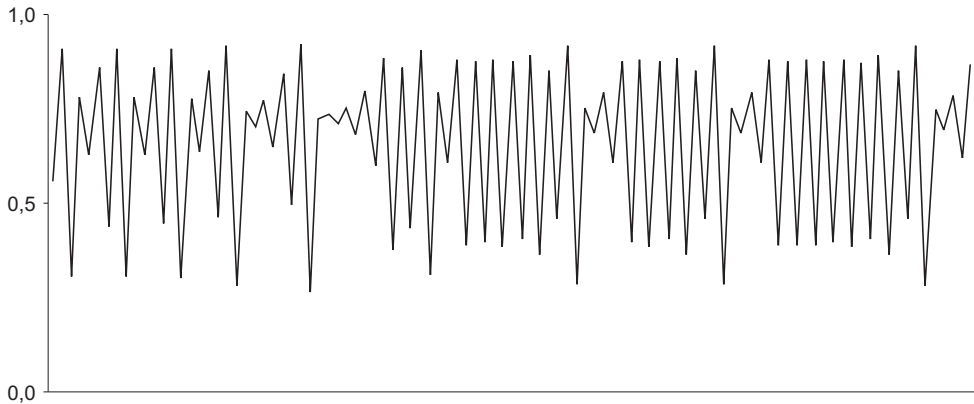
Jednym z grupy prostych odwzorowań nieliniowych, które generuje przebiegi o charakterze chaotycznym (Baker, Gollub, 1998, s. 84; Schuster, 1995, s. 30) jest odwzorowanie logistyczne opisywane zależnością:

$$x_{t+1} = px_t(1 - x_t) \quad (1)$$

* Dr hab. inż. Jacek Wołoszyn jest pracownikiem Wyższej Szkoły Umiejętności w Kielcach oraz Małopolskiej Wyższej Szkoły Ekonomicznej w Tarnowie.

Dr Paweł Wołoszyn jest pracownikiem Akademii Górniczo-Hutniczej im. Stanisława Staszica w Krakowie.

w której nowa wartość szeregu jest wyznaczana na podstawie wartości w poprzedniej chwili czasu. Proces iteracyjny rozpoczyna ustalona wartość początkowa x_0 . Formuła (1) generuje przebiegi chaotyczne dla wartości parametru p zawartych w przedziale (3.0; 4.0).



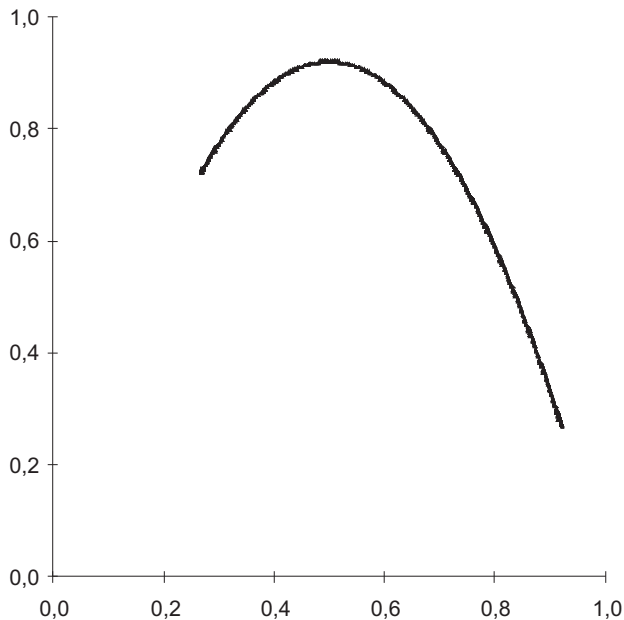
Rys. 1. Odwzorowanie $x_{t+1} = px_t(1 - x_t)$, parametr $p = 3,683828$, wartość początkowa $x_0 = 0,7$, iteracje 3001—3100

Źródło: opracowanie własne.

Rysunek 1 przedstawia wykres wartości szeregu czasowego uzyskanego w rezultacie iteracyjnego stosowania formuły (1) dla parametru $p = 3,683828$ oraz wartości początkowej $x_0 = 0,7$. Rozpoczynając od punktu startowego wykonanych zostało 5000 kroków iteracji. Jak widać, szereg czasowy zobrazowany na wspomnianym wykresie ma zdecydowanie nieregularny i niecykliczny kształt.

Stan systemu dynamicznego w pewnym wybranym momencie czasu opisać można zbiorem wartości zmiennych systemu (nazywanych także zmiennymi stanu). Uporządkowany zbiór tych wartości interpretować możemy jako punkt w wielowymiarowej przestrzeni stanów systemu. Wymiar tej przestrzeni zależy bezpośrednio od ilości zmiennych opisujących system. W najprostszym przypadku utworzyć możemy dwuwymiarową przestrzeń mającą postać płaszczyzny fazowej. W przypadku bardziej złożonych systemów dynamicznych przestrzeń fazowa wymaga uwzględnienia trzech lub większej liczby wymiarów. Jest rzeczą oczywistą, że wzrost wymiarowości przestrzeni fazowej znacznie zwiększa stopień trudności i złożoności obliczeniowej przy analizowaniu obrazu fazowego badanego systemu dynamicznego. Jedną z metod umożliwiających analizę złożonych przestrzeni fazowych jest ich rzutowanie na wybrane płaszczyzny lub sporządzanie dwuwymiarowych przekrojów.

W rozważanych przez nas zagadnieniach przestrzeń fazową ograniczymy do dwuwymiarowej płaszczyzny fazowej, którą wyznaczają dwie prostopadłe do sie-



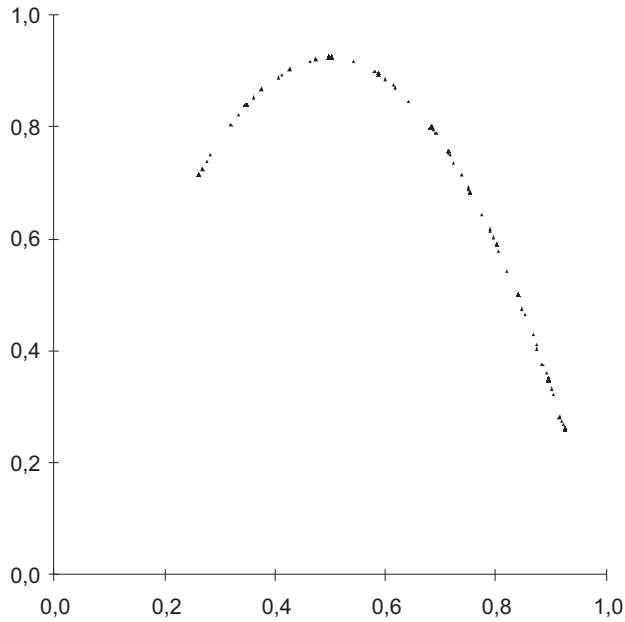
Rys. 2. Wykres fazowy szeregu generowanego przez odwzorowanie $x_{t+1} = px_t(1 - x_t)$, parametr $p = 3,683828$, wartość początkowa $x_0 = 0,7$, iteracje 3001—3100

Źródło: opracowanie własne.

bie osie. W klasycznym przypadku jedna z osi reprezentuje wybraną zmienną systemu, a druga jej pochodną względem czasu. Obraz fazowy (wykres fazowy) dynamiki systemu powstaje przez naniesienie na płaszczyznę fazową punktów określonych przez współrzędne, którymi są pary wartości obydwu szeregów odpowiadające tej samej chwili czasu. Otrzymane w ten sposób punkty układają się w trajektorię systemu.

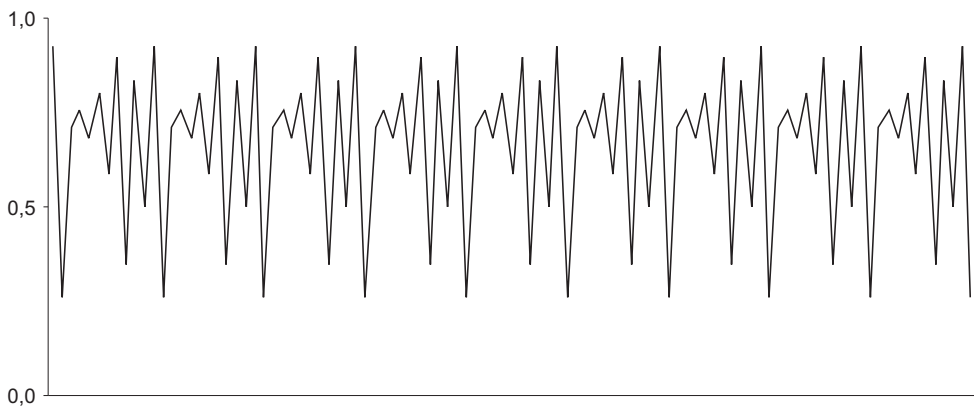
Analizowanie zbudowanego wykresu fazowego systemu dynamicznego stanowi silne narzędzie badania dynamiki tego systemu. Obraz fazowy wyraża dynamikę systemu przedstawioną w innym wymiarze niż obserwowane szeregi czasowe i pozwala rozpoznać zależności trudno zauważalne bezpośrednio w badanym systemie. Czas na wykresie fazowym nie biegnie wzdłuż wyodrębnionej osi układu współrzędnych, ale może zostać zobrazowany na tym wykresie w formie znaczników umieszczonych wzdłuż trajektorii badanego systemu.

Na rysunku 2 przedstawiony został obraz fazowy dla przypadku szeregu czasowego przedstawionego w postaci wykresu czasowego z rysunku 1. Obserwując punkty wykresu stwierdzamy dużą równomierność ich rozkładu wzdłuż trajektorii rozważanego systemu. Świadczy to o zdecydowanym braku cykliczności i porządku w generowanym szeregu chaotycznym. Przy zmianie wartości parametru



Rys. 3. Wykres fazowy szeregu generowanego przez odwzorowanie $x_{t+1} = px_t(1 - x_t)$, parametr $p = 3,693448$, wartość początkowa $x_0 = 0,7$, iteracje 3001—3100

Źródło: opracowanie własne



Rys. 4. Wykres czasowy szeregu generowanego przez odwzorowanie $x_{t+1} = px_t(1 - x_t)$, parametr $p = 3,693448$, wartość początkowa $x_0 = 0,7$, iteracje 3001—3100

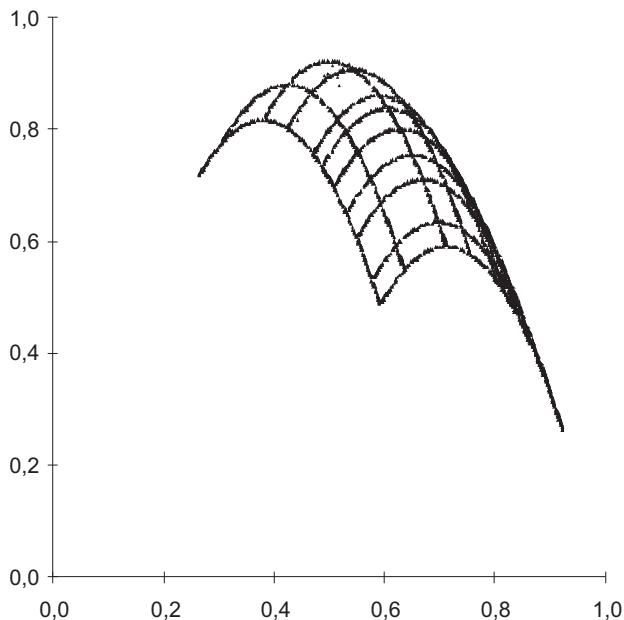
Źródło: opracowanie własne

$p=3,693448$ generowany przez odwzorowanie (1) szereg czasowy wykazuje mniejszą chaotyczność, co można wywnioskować ze znacznie mniejszej liczby punktów wykresu fazowego tego szeregu (rysunek 3). Powodem takiego obrazu jest nakładanie się punktów trajektorii w przestrzeni fazowej, czego przyczyną jest znacznie większa cykliczność i powtarzanie się sekwencji wartości w szeregu czasowym. Wskazane cechy charakterystyczne szeregu widać wyraźnie na wykresie czasowym pokazanym na rysunku 4.

3. Złożone chaotyczne szeregi czasowe

Szeregi czasowe generowane przez proste odwzorowania nieliniowe można poddawać operacjom, w wyniku których powstaje nowy szereg mogący stanowić przedmiot badań. Na użytek niniejszej pracy powstały w ten sposób szereg nazywać będziemy szeregiem złożonym. Operacje wspomniane wyżej to proste działania arytmetyczne wykonywane na odpowiadających sobie wartościach szeregów.

Weźmy pod uwagę dwa szeregi czasowe $x^{(1)}$ oraz $x^{(2)}$ generowane niezależnie od siebie przez odwzorowanie (1) dla jednakowej wartości początkowej $x^{(1)}_0 = x^{(2)}_0 = 0,7$ oraz różnych wartości parametru p . W prosty sposób możemy dokonać

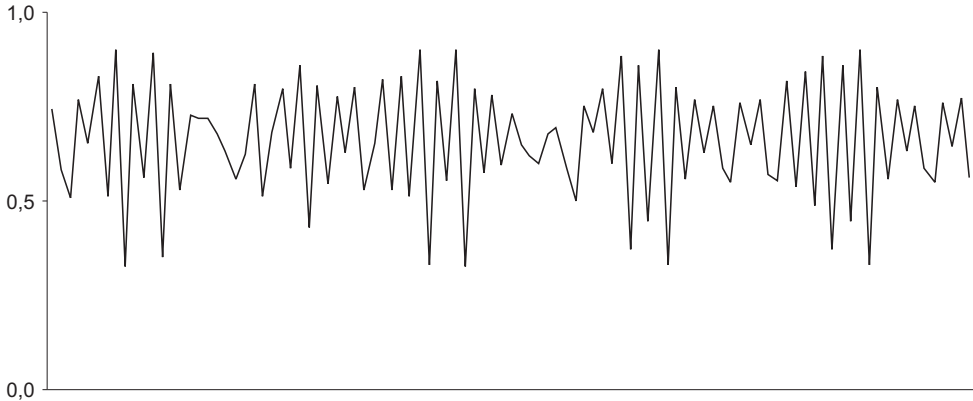


Rys. 5. Wykres fazowy szeregu średniej arytmetycznej szeregów z rysunków 1 i 4

złożenia tych szeregów obliczając dla każdej pary wartości szeregów średnią arytmetyczną. Powstały w ten sposób szereg

$$x_t = (x^{(1)}_t + x^{(2)}_t)/2 \quad (2)$$

ma wartości mieszczące się w tym samym przedziale, co szeregi składowe. Dla otrzymanego szeregu zbudować możemy wykres fazowy, tak jak dla szeregów składowych. Interesującym zagadnieniem jest badanie własności wykresu fazowego dla różnych par wartości parametrów p szeregów składowych.



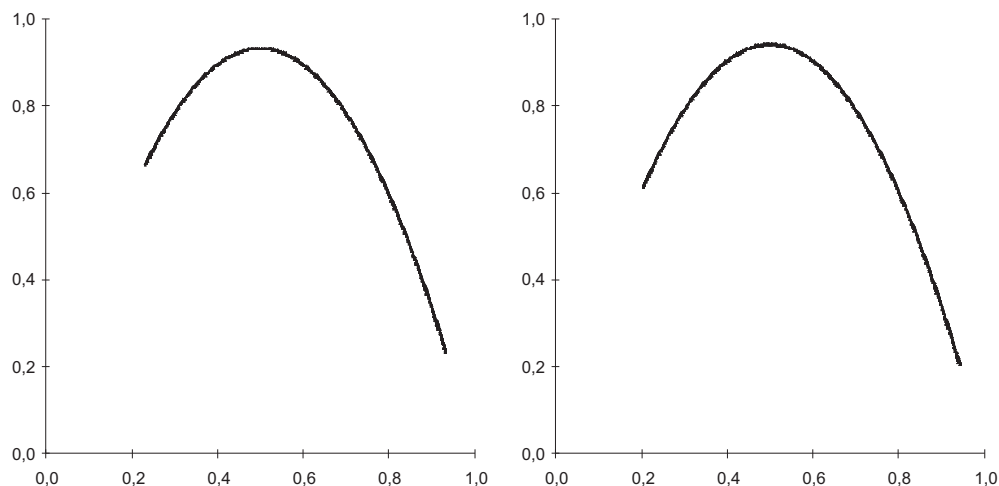
Rys. 6. Wykres czasowy szeregu średniej arytmetycznej odpowiadający wykresowi fazowemu przedstawionemu na rysunku 5

Źródło: opracowanie własne

Dla dwóch wartości parametru $p^{(1)} = 3,683828$ oraz $p^{(2)} = 3,693448$, czyli dla dwóch zaprezentowanych wcześniej już szeregów, otrzymujemy na podstawie zależności (1) i (2) wykres fazowy szeregu średniej arytmetycznej przedstawiony na rysunku 5. Obraz fazowy średniej ma, jak widać, zasadniczo inny charakter w porównaniu z wykresami fazowymi szeregów składowych.

Wykres czasowy szeregu średniej arytmetycznej ma natomiast wygląd chaotycznego szeregu czasowego. Analizując ten wykres trudno byłoby ustalić, że szereg powstał ze złożenia dwóch innych chaotycznych szeregów czasowych generowanych odwzorowaniem logistycznym. Na podstawie porównania wykresów fazowych (rysunki 2 i 5) można stwierdzić zasadniczo różny charakter i sposób powstania obydwu rozważanych chaotycznych szeregów czasowych.

Weźmy pod uwagę jeszcze jeden przykład złożonego chaotycznego szeregu czasowego, który powstał jako średnia arytmetyczna dwóch niezależnie generowanych szeregów czasowych o parametrach — pierwszy szereg: $x_0 = 0,7$ i $p = 3,733122$ oraz drugi szereg $x_0 = 0,7$ i $p = 3,768627$. Na rysunku 7 zobrazowa-



Rys. 7. Wykresy fazowe chaotycznych szeregów czasowych generowanych przez formułę (1) dla parametrów — pierwszy szereg: $x_0 = 0,7$ i $p = 3,733122$, drugi szereg: $x_0 = 0,7$ i $p = 3,768627$

Źródło: opracowanie własne

no kolejno wykresy fazowe wspomnianych szeregów czasowych, a na rysunku 8 przedstawiono wykres fazowy szeregu średniej arytmetycznej.

Wykres fazowy przedstawiony na rysunku 8 ma zasadniczo różny charakter w porównaniu z omawianymi wcześniej wykresami fazowymi prezentowanymi na rysunkach 2, 3 i 5. Dalsze badanie charakterystycznych cech wykresów fazowych chaotycznych szeregów czasowych może dostarczyć wygodnego narzędzia klasyfikacji tej klasy szeregów, a tym samym przyczynić się do lepszego rozpoznania dynamiki systemów chaotycznych.

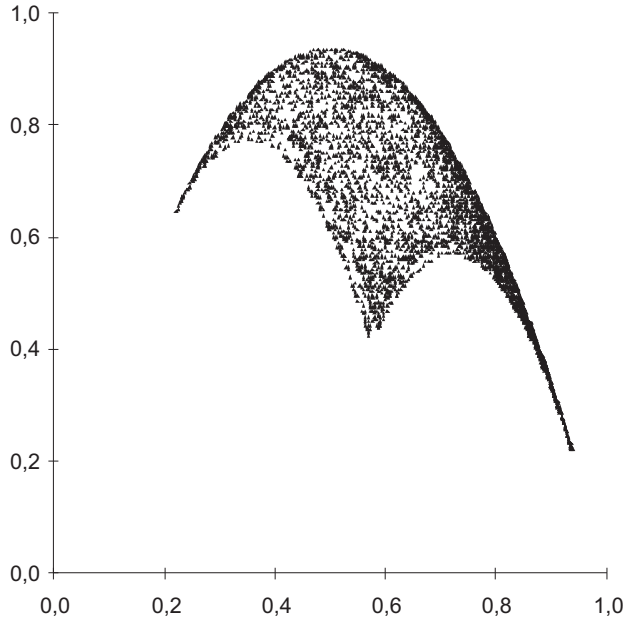
4. Inne operacje na chaotycznych szeregach czasowych

Obok średniej arytmetycznej chaotycznych szeregów czasowych rozpatrywać można wiele innych operacji złożenia generowanych niezależnie szeregów. Przykładowo rozpatrzmy formułę odwzorowania kwadratowego

$$x_{t+1} = 2x_t^2 - 1 \quad (3)$$

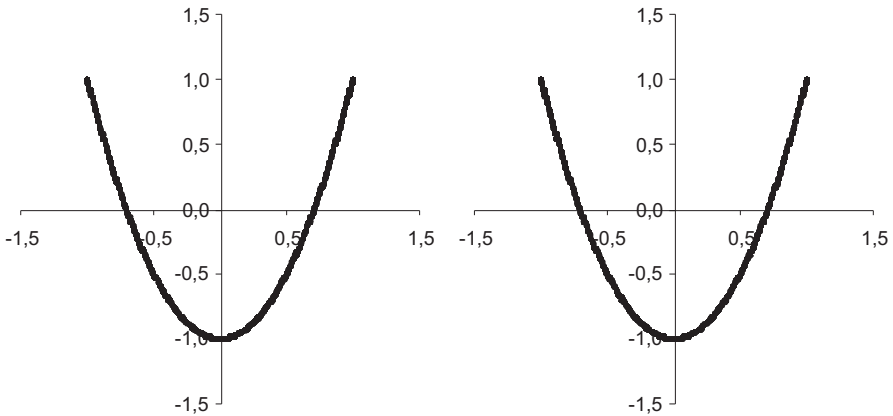
która generuje chaotyczne szeregi czasowe dla różnych wartości początkowych x_0 .

Wybierając dwie wartości początkowe $x_0 = 0,7223$ oraz $x_0 = 0,0434$ i dokonując 10000 iteracji odwzorowania (3) uzyskujemy dwa chaotyczne szeregi czasowe o wykresach fazowych pokazanych na rysunku 9.



Rys. 8. Wykres fazowy szeregu czasowego średniej arytmetycznej chaotycznych szeregów czasowych reprezentowanych przez wykresy fazowe z rysunku 7

Źródło: opracowanie własne



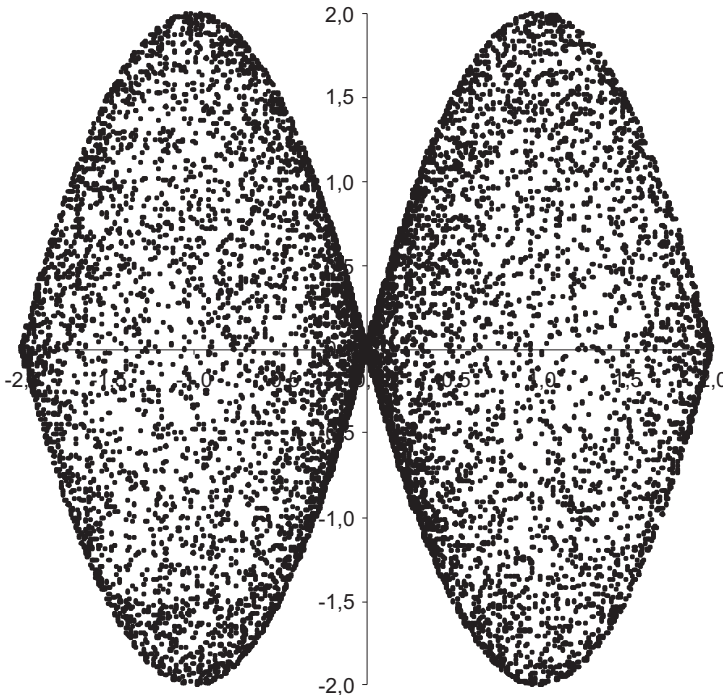
Rys. 9. Wykresy fazowe chaotycznych szeregów czasowych generowanych przez formułę (3) dla parametrów — pierwszy szereg: $x_0 = 0,7223$ i drugi szereg: $x_0 = 0,0434$

Źródło: opracowanie własne

Na podstawie otrzymanych chaotycznych szeregów czasowych tworzymy szereg różnicowy x_t zgodnie z zależnością

$$x_t = (x_t^{(1)} - x_t^{(2)}) \quad (4)$$

Otrzymany szereg czasowy również przejawia charakter chaotyczny, a jego wykres fazowy przedstawiony został na rysunku 10.

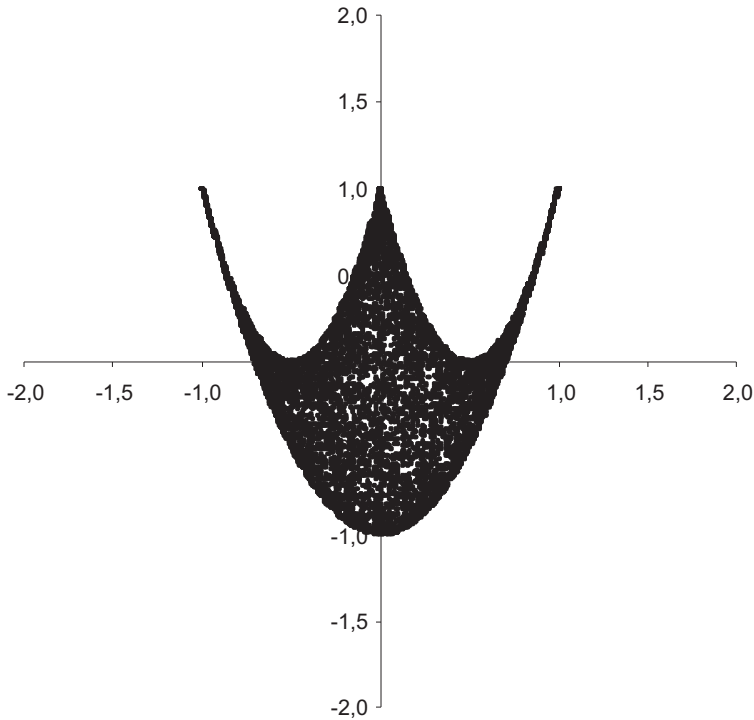


Rys. 10. Wykres fazowy szeregu czasowego różnic chaotycznych szeregów czasowych reprezentowanych przez wykresy fazowe z rysunku 9

Źródło: opracowanie własne

Porównując otrzymane obrazy fazowe widzimy wyraźną różnicę w charakterze wykresów fazowych sporządzonych dla prostych — generowanych jednolitą formułą np. (1) lub (3) — chaotycznych szeregów czasowych oraz złożonych szeregów czasowych powstałych jako pewna kombinacja szeregów składowych.

Rozpatrzmy jeszcze jeden przykład złożenia chaotycznych szeregów czasowych poprzez utworzenie szeregu iloczynów poszczególnych ich elementów. Wynik tej operacji pokazuje rysunek 11, na którym zaprezentowano obraz fazowy szeregu iloczynowego. Również ten obraz fazowy przejawia charakterystyczne cechy, które nie są możliwe do zaobserwowania na wykresach czasowych szeregów chaotycznych.



Rys. 11. Wykres fazowy szeregu czasowego iloczynów chaotycznych szeregów czasowych reprezentowanych przez wykresy fazowe z rysunku 9

Źródło: opracowanie własne

5. Zakończenie

Należy stwierdzić, że złożone chaotyczne szeregi czasowe stanowią odrębną grupę szeregów chaotycznych. Badanie własności takich szeregów może stanowić samo w sobie interesujące zagadnienie. Otrzymane rezultaty mogą przyczynić się do rozwoju metod klasyfikacji chaotycznych szeregów czasowych, a także aproksymacji dowolnych chaotycznych szeregów odpowiednio zdefiniowanym złożeniem prostych szeregów.

Bibliografia

1. Baker G. L., Gollub J. P. 1998. *Wstęp do dynamiki układów chaotycznych*. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN. ISBN 83-01-12617-5.
2. Dorfman J.R. 2001. *Wprowadzenie do teorii chaosu w nierównowagowej mechanice statystycznej*. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN. ISBN 83-01-13593-X.

3. Kendall B.E. 2002. *Chaos and Cycles*. W: *Encyclopedia of Global Environmental Change*, Vol. 2: 209—215. Chichester: John Wiley & Sons, Ltd. ISBN 0-471-97796-9
4. Tempczyk M. 2002. *Teoria chaosu dla odważnych*. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN. ISBN 83-01-13745-2.
5. Schuster H.G. 1995. *Chaos deterministyczny*. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN. ISBN 83-01-10940-8.

Streszczenie

Przebiegi o charakterze chaotycznym obserwowane są w systemach deterministycznych, w których występują nieliniowości. Proste odwzorowania nieliniowe, takie jak odwzorowanie logistyczne lub kwadratowe, generują w sposób iteracyjny chaotyczne szeregi czasowe. W pracy zaproponowano badanie własności złożonych chaotycznych szeregów czasowych powstających przez wykonanie operacji na parach lub większej liczbie odpowiadających sobie elementów szeregów składowych. Wygodną metodą badania własności powstałych szeregów czasowych jest sporządzenie i analiza ich obrazów fazowych, które ujawniają cechy nie obserwowane bezpośrednio na wykresach czasowych rozpatrywanych szeregów.

Słowa kluczowe

chaos deterministyczny, złożone chaotyczne szeregi czasowe, obraz fazowy

Compound Chaotic Time Series

Summary

In deterministic systems with non-linear relations there are chaotic courses observed. Simple non-linear mapping, like logistical or square mapping, generate chaotic time series in the iterative way. The paper presents a method of properties research of compound chaotic time series, which are created as a result of some operations, performed on couples or greater number of corresponding elements of component series. Making and analyzing the phase diagrams, which reveal properties not observed directly on timing diagrams of consider series, is a convenient method of research of properties of created time series.

Keywords

deterministic chaos, compound chaotic time series, phase diagram

PRACE Z ZAKRESU TURYSTYKI

