Maria Dąbrowa

Kilka zastosowań pochodnej funkcji w podstawowych pojęciach ekonomicznych

Wstęp

Matematyka jest rozległą dziedziną wiedzy obejmującą wiele dyscyplin naukowych o bardzo różnorodnej tematyce i zróżnicowanych metodach badawczych. Jest dziedziną naukową nadal otwartą — wciąż powstają i są dowodzone nowe twierdzenia, stosowane nowe metody badawcze. Szczególnie atrakcyjne są tzw. zastosowania matematyki w innych dyscyplinach naukowych (w tym nawet w biologii, medycynie[1], naukach humanistycznych[2], teorii gier, sporcie itp.).

Tak więc zastosowanie matematyki w naukach ekonomicznych jest czymś zupełnie oczywistym. Matematyka jest tu wspaniałym narzędziem, które pozwoli lepiej zrozumieć znane ekonomiście pojęcia, fakty i zależności i spojrzeć na nie pod nieco innym kątem.

W tej pracy chcę pokazać kilka zastosowań analizy pochodnej funkcji. Jest to zaledwie niewielki (i mam nadzieję, najbardziej przystępny) fragment zastosowań rachunku różniczkowego w podstawowych pojęciach ekonomicznych.

W tym celu muszę przypomnieć podstawowe definicje i twierdzenia, starając się jednak do minimum ograniczyć formalizm wypowiedzi i zapisów.

1. Matematyczne ujęcie przyrostu funkcji i definicji pochodnej funkcji w punkcie

W poniższych rozważaniach zajmować się będę funkcjami rzeczywistymi o wartościach rzeczywistych, a więc funkcjami typu:

$$f : D \to R, \quad D \subset R, \quad \textit{gdzie } D \textit{ jest dziedziną funkcji } f$$

---

[1] *Materiały naukowe z XXX Ogólnopolskiej Konferencji Zastosowań Matematyki*, Zakopane 18–25 września 2001, Warszawa 2001.

[2] „Matematyka Stosowana, Pismo Polskiego Towarzystwa Matematycznego”, 2001, nr 2.

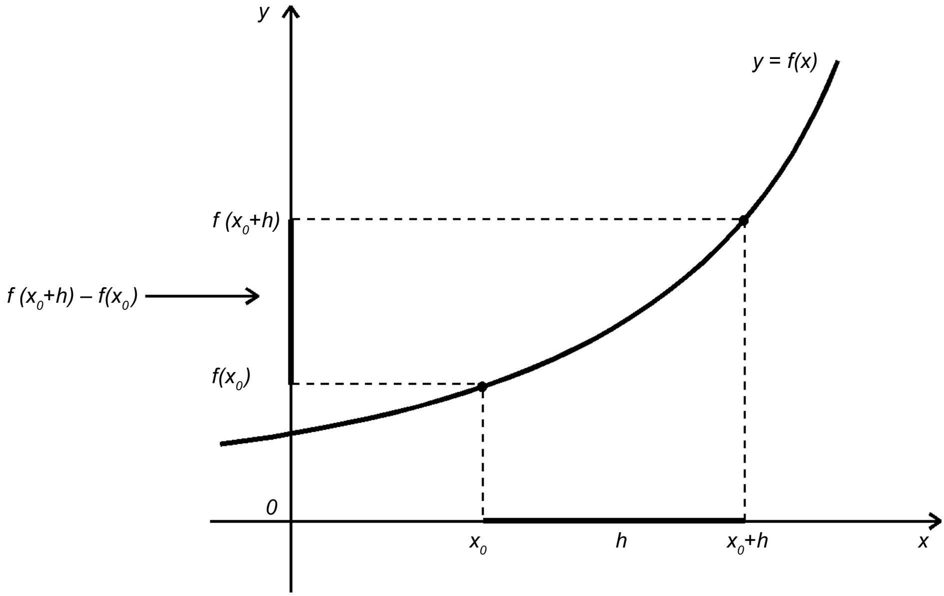
Przypomnę teraz kilka definicji i twierdzeń (być może znanych Czytelnikowi) ułatwiających zrozumienie omawianych tu problemów.

— Przyrost argumentu

Niech $x_0 \in D$ i $x_0 + h \in D, \quad h \neq 0$
wówczas h j e s t p r z y r o s t e m a r g u m e n t u (może on być dodatni lub ujemny).

— Przyrost wartości funkcji odpowiadający przyrostowi argumentu h.
Jest to różnica $f(x_0 + h) - f(x_0)$ (rysunek 1).

Rysunek 1

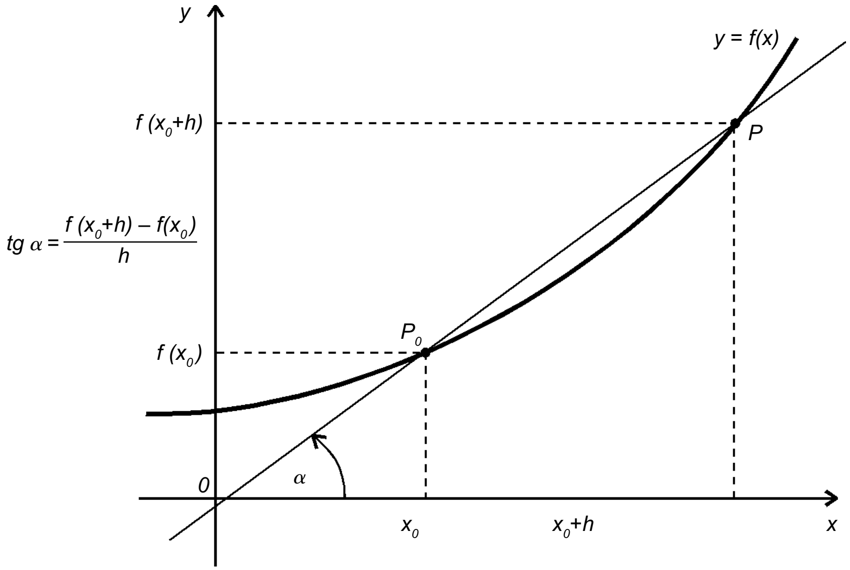


— Przyrost przeciętny wartości funkcji odpowiadający przyrostowi argumentu h (od wartości x_0) jest to iloraz: $\dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$.

Jest on znany również jako iloraz różnicowy funkcji f w punkcie x_0.
Ważna jest interpretacja geometryczna tego ilorazu.
Niech krzywa $y = f(x)$ będzie wykresem funkcji f. Weźmy sieczną tej krzywej przechodzącą przez punkty $P_0 = (x_0, f(x_0))$ i $P = (x_0 + h, f(x_0 + h))$

Iloraz różnicowy jest tangensem kąta α, który ta sieczna tworzy z kierunkiem dodatnim osi OX (rysunek 2).

Rysunek 2



— **Przyrost względny** (procentowy) wartości funkcji *f* odpowiadający przyrostowi argumentu $h \neq 0$ liczonemu od x_0 jest to iloraz: $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{f(x_0)}$

przy $f(x_0) \neq 0$, a więc stosunek przyrostu wartości funkcji do wartości funkcji w punkcie wyjściowym x_0. Stosuje się go często do porównywania tempa przyrostu funkcji. Iloraz ten bardzo często wyrażany jest w procentach (jako wyrażenie niemianowane) — stąd jego nazwa — przyrost procentowy.

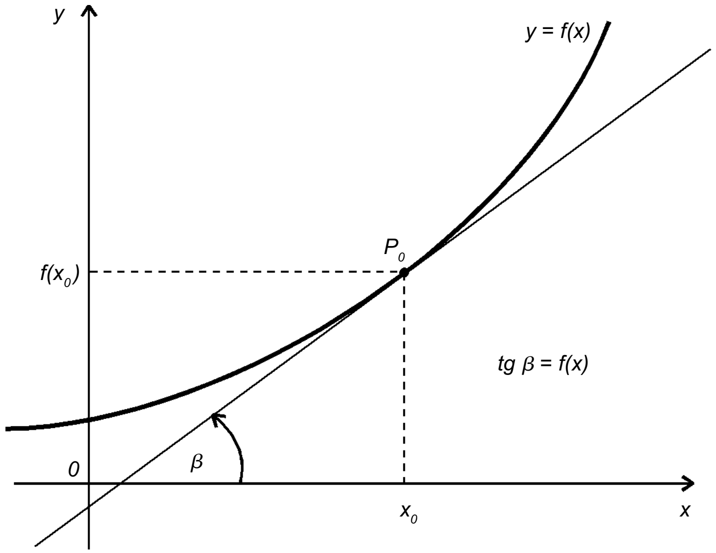
— **Przez pochodną funkcji** w punkcie x_0 rozumiemy granicę ilorazu różnicowego (o ile ta granica istnieje i jest właściwa) przy *h* zmierzającym do 0 $(x_0 + h \to x_0)$.

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Graniczne położenie, do którego zmierza sieczna (przedstawiona na rysunek 2), gdy *h* dąży do zera, uważa się za położenie stycznej do wykresu w punkcie $P_0 = (x_0, f(x_0))$.

Tak więc $f'(x_0) = \operatorname{tg} \beta$, gdzie β jest kątem utworzonym przez styczną do krzywej *y = f(x)* w punkcie $P_0 = (x_0, f(x_0))$ z dodatnim kierunkiem osi OX (rysunek 3).

Rysunek 3



2. Interpretacja ekonomiczna pochodnej

Koszt wytworzenia dowolnej wielkości produkcji zależy od wielkości nakładów poszczególnych czynników produkcji oraz ich cen. Jest on więc funkcją kilku zmiennych.

Jeżeli jednak nasze rozważania ograniczymy do krótkiego okresu, a więc czasu, w którym przynajmniej jeden czynnik produkcji jest stały możemy koszt przedstawić jako funkcję jednej zmiennej: wielkości produkcji.

Koszty całkowite są sumą kosztów stałych i kosztów zmiennych.

Niech $K : R_+ \to R_+$ będzie funkcją kosztu całkowitego zależną od wielkości produkcji *x*; gdzie $x \in (0,+\infty)$. Wtedy funkcję $K_p : x \to K_p(x) = \frac{K(x)}{x}$ nazywamy funkcją kosztów przeciętnych, a jej wartość $K_p(x_0) = \frac{K(x_0)}{x_0}$ kosztem przeciętnym (jednostkowym) wytworzenia jednostki produktu przy poziomie produkcji x_0.

Przy podejmowaniu decyzji dotyczących wielkości produkcji (i jej wpływu na koszty) bardzo ważną wskazówką jest kształtowanie się kosztów jednostkowych przy różnych rozmiarach produkcji. W tego typu analizach przydatne jest wykorzystanie kosztów krańcowych. Koszt krańcowy to koszt wytworzenia dodatkowej jednostki produktu (przy założeniu, że produkcja zmienia się skokowo), czyli przyrost kosztów spowodowany zwiększeniem produkcji o jednostkę. Tak więc koszty krańcowe informują o tym, jak wzrosną koszty całkowite przy wzroście produkcji o jedną jednostkę $\left(K_k = \frac{\Delta K}{\Delta x} \right)$.

Często jednak zakładamy ciągłą, a nie skokową zmianę wielkości produkcji.

Przy założeniu, że funkcja *K(x)* jest różniczkowalna oraz, $x_0 > 0, \quad \Delta x > 0, \quad x_0 + \Delta x > 0$, gdzie Δx jest dodatnim przyrostem argumentu funkcji (przyrostem produkcji), można zbudować iloraz różnicowy (przyrost przeciętny) tej funkcji: $\dfrac{K(x_0 + \Delta x) - K(x_0)}{\Delta x} = \dfrac{\Delta K}{\Delta x}$.

Wyraża on przeciętny koszt wytworzenia dodatkowych jednostek produktu (Δx) poczynając od poziomu x_0.

Granicą tego ilorazu przy $\Delta x \to 0$ jest pochodna funkcji K w punkcie x_0 (na podstawie przytoczonej powyżej definicji pochodnej funkcji w punkcie).

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta K}{\Delta x} = K'(x_0).$$

Stąd $K_k(x_0) = K'(x_0)$. Natomiast funkcja $K_k : x \to K'(x)$ jest funkcją kosztu krańcowego.

Na podstawie definicji pochodnej funkcji w punkcie i definicji granicy funkcji w punkcie można stwierdzić, że dla dostatecznie małych przyrostów h zachodzi przybliżona równość:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \approx f'(x_0).$$

Mamy więc analogicznie: $\dfrac{\Delta K}{\Delta x} \approx K'(x_0)$ przy dostatecznie małym przyroście Δx. Zatem przy dostatecznie małym przyroście produkcji zachodzi przybliżona równość: $\Delta K \approx K'(x_0) \cdot \Delta x$.

Zwiększając produkcję o Δx jednostek od poziomu wyjściowego x_0, spowodujemy przyrost kosztu całkowitego w przybliżeniu o wartość $K'(x_0) \cdot \Delta x$.

Przyjmując w szczególności $\Delta x = 1$ (a więc wzrost produkcji o 1 jednostkę w porównaniu z poziomem wyjściowym x_0), otrzymamy: $\Delta K \approx K'(x_0) = K_k(x_0)$.

Tak więc wartość nakładów zużytych do wyprodukowania dodatkowej jednostki produktu,w stosunku do poziomu wyjściowego x_0, jest w przybliżeniu równa kosztowi krańcowemu przy produkcji x_0.

Analogicznie można zinterpretować pochodną, gdy funkcja opisuje zależność utargu od wielkości sprzedanej produkcji.

Niech *U(x)* oznacza utarg uzyskany ze sprzedaży x jednostek pewnego produktu, $x_0 > 0$, $\Delta x > 0$, wówczas, $U_k(x_0) = U'(x_0)$ gdzie $U_k(x_0)$ oznacza u t a r g k r a ń c o w y na poziomie x_0 sprzedanej produkcji, a funkcja $U_k : x \to U'(x)$ jest funkcją utargu krańcowego.

P r z y k ł a d 1

Koszt całkowity wyprodukowania x jednostek pewnego artykułu wyraża się wzorem: $K_c(x) = 0{,}1x^3 + 10x + 200$. Przy jakiej wielkości produkcji koszt przeciętny wyprodukowania jednostki tego artykułu będzie równy kosztowi krańcowemu?

Funkcja kosztu przeciętnego ma postać:

$$K_p(x)=\frac{0{,}1x^3+10x+200}{x}=0{,}1x^2+10x+\frac{200}{x},$$

a funkcja kosztu krańcowego: $K_k(x)=0{,}3x^2+10$.

Aby sprawdzić, dla jakiej produkcji x te koszty są równe, budujemy i rozwiązujemy równanie:

$$K_k(x)=K_p(x)\Leftrightarrow 0{,}3x^2+10=0{,}1x^2+10+\frac{200}{x}.$$

Rozwiązaniem równania jest $x = 10$. Zatem przy produkcji $x = 10$ koszt krańcowy jest równy kosztowi przeciętnemu.

Można pokazać (i zrobię to poniżej), że koszt przeciętny osiąga minimum tam, gdzie koszt przeciętny równa się kosztowi krańcowemu.

3. Elastyczność funkcji

Jeżeli weźmiemy stosunek przyrostu względnego wartości funkcji do przyrostu względnego jej argumentu (liczonemu od x_0) to otrzymamy dla $h \neq 0$:

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{f(x_0)}:\frac{(x_0+h)-x_0}{x_0}=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\cdot\frac{x_0}{f(x_0)}$$

Granica tego wyrażenia (o ile istnieje) przy $h\to 0$ jest elastycznością funkcji w punkcie x_0.

$$E_x f(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\cdot\frac{x_0}{f(x_0)}=\frac{f'(x_0)}{f(x_0)}\cdot x_0.$$

T w i e r d z e n i e

Jeżeli zmienna x wzrośnie o a% od poziomu x_0, to wartość funkcji f wzrośnie (zmaleje) w przybliżeniu o b%, gdzie b $\approx a\cdot E_x f(x_0)$.

Elastyczność funkcji w punkcie x_0 informuje więc, o ile procent (w przybliżeniu) wzrośnie lub zmaleje wartość funkcji, jeśli argument x wzrośnie o 1% od poziomu x_0.

Elastyczność funkcji ma szerokie zastosowanie w ekonomii, szczególnie przy badaniu zależności popytu od wzrostu ceny, a więc przy badaniu rynku i jego reakcji na planowaną podwyżkę cen wybranych produktów.

P r z y k ł a d 2

Obliczyć i zinterpretować elastyczności funkcji popytu względem ceny:

a) $Q(p)=p^2\cdot e^{-0{,}5p}$ przy $p_0 = 10$,

b) $Q(p)=80\,000\cdot e^{2\sqrt{p}-0{,}09p}$ przy $p_0 = 100$.

Ad a) Obliczamy pochodną funkcji *Q(p)*:

$$Q'(p) = p \cdot e^{-0,5p} \cdot (2 - 0,5p),$$

$$E_p Q(p) = 2 - 0,5p \quad \Rightarrow \quad E_p Q(10) = -3.$$

Zatem jeżeli cena p wzrośnie o 1% od poziomu $p_0 = 10$, to popyt na ten towar zmniejszy się o około 3%.

Ad b) Pochodna funkcji ma postać $Q'(p) = 80\,000 \cdot e^{2\sqrt{p} - 0,09p} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{p}} - 0,09 \right)$,

a elastyczność funkcji $E_p Q(p) = \sqrt{p} - 0,09p \quad \Rightarrow \quad E_p Q(100) = 1.$

Tak więc przy wzroście ceny *p* od poziomu $p_0 = 100$ popyt wzrośnie o około 1%.

Ekonomiczną analizę tej sytuacji — w tym odpowiedź na pytanie: „Z jakiego typu dobrami możemy tu mieć do czynienia?" — pozostawiam Czytelnikowi.

Pragnę jeszcze zwrócić tu uwagę na kwestię znaku elastyczności w punkcie x_0.

Znak elastyczności popytu jest na ogół ujemny, gdyż krzywe popytu mają „nachylenie ujemne"[3]. Oznacza to, że kąt α nachylenia wykresu funkcji popytu (lub stycznej do tego wykresu w punkcie A, którego pierwsza współrzędna jest równa x_0) do osi odciętych jest rozwarty, a więc jego tangens jest liczbą ujemną.

Przypomnę, że $f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$, $(f'(x_0) < 0)$, tak więc $E_x f(x_0) = \frac{f'(x_0)}{f(x_0)} \cdot x_0 < 0$; wartość funkcji $f(x_0)$ jest dodatnia (jako popyt na dane dobro przy cenie x_0) podobnie jak x_0 (czyli wyjściowa cena).

Ekonomiści w dyskusjach na ten temat zwykle dla wygody opuszczają znak minus, traktując go w kategoriach wartości bezwzględnej. W przypadku gdy wartość bezwzględna cenowej elastyczności popytu jest równa 1, mówimy o elastyczności wzorcowej. Gdy $|E_p Q(p)| > 1$, a więc względna zmiana popytu jest większa niż względna zmiana ceny, mówimy o popycie wysoce elastycznym. Im bardziej ta wartość oddala się od jedynki, tym popyt jest bardziej elastyczny.

Należy jednak pamiętać o tym, że znak minus (przy elastyczności popytu) na ogół istnieje. Powinien o tym pamiętać zwłaszcza matematyk, który może wyznaczać elastyczności funkcji nie tylko w odniesieniu do funkcji popytu i uzyskiwać liczby ujemne, dodatnie a nawet zero.

4. Badanie przebiegu zmienności funkcji

Proces sporządzania wykresu funkcji określonej danym wzorem poprzedzony jest szeregiem, często dość żmudnych, operacji badania tej funkcji. Nie będę ich omawiała szczegółowo — schemat badania funkcji zawiera 10–11 elementów, które należy sprawdzić[4].

[3] H. R. V a r i a n, *Mikroekonomia*, PWN, Warszawa 1997, s. 293.

[4] Patrz: T. S t a n i s z, *Zastosowania matematyki w ekonomii*, Wydawnictwo TRAPEZ, Kraków, s. 75, lub G. M. F i c h t e n h o l z, *Rachunek różniczkowy i całkowy*, PWN, Warszawa 1972, t. I, s. 267.

Zatrzymam się jednak chwilę nad niektórymi elementami tego procesu.

3.1. Badanie pochodnej pierwszego rzędu funkcji

Pozwala ono wyznaczyć ekstrema i przedziały monotoniczności funkcji, a więc przedziały, w których funkcja rośnie lub maleje.

W punkcie x_0 istnieje m a k s i m u m (lub m i n i m u m), jeżeli istnieje taki przedział otaczający punkt x_0, że $f(x_0)$ jest największą (względnie najmniejszą) spośród wartości, jakie funkcja przyjmuje w tym przedziale.

Warunkiem koniecznym (ale nie wystarczającym) istnienia ekstremum w punkcie x_0 jest zerowanie się pochodnej w tym punkcie.

Twierdzenie Lagrange'a pozwala ustalić związek między znakiem pochodnej a wzrastaniem względnie zmniejszaniem się wartości funkcji.

T w i e r d z e n i e

Jeżeli funkcja jest różniczkowalna w przedziale $(a,b) \subset R$ i dla każdego $x \in (a,b)$ zachodzi nierówność $f'(x) > 0$, to funkcja f jest w tym przedziale rosnąca. Jeżeli zaś, $f'(x) < 0$, to funkcja f jest malejąca.

Jeżeli zatem funkcja f jest różniczkowalna w przedziale (a,b), $x_0 \in (a,b)$ jest miejscem zerowym pochodnej oraz:

$$\left.\begin{array}{lll} f'(x) < 0 & dla & x < x_0 \\ f'(x_0) = 0 & & \\ f'(x) > 0 & dla & x > x_0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ funkcja } f \text{ ma w punkcie } x_0 \text{ minimum}$$

$$\left.\begin{array}{lll} f'(x) > 0 & dla & x < x_0 \\ f'(x_0) = 0 & & \\ f'(x) < 0 & dla & x > x_0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ funkcja } f \text{ ma w punkcie } x_0 \text{ maksimum.}$$

3.2. Badanie pochodnej drugiego rzędu

T w i e r d z e n i e

Jeżeli funkcja $f:(a,b) \to R$ ma pochodną drugiego rzędu w przedziale (a,b) oraz $f''(x) > 0 \quad dla \quad x \in (a,b)$, to funkcja jest wypukła w przedziale (a,b). Jeżeli zaś $f''(x) < 0 \quad dla \quad x \in (a,b)$, to funkcja jest wklęsła w przedziale (a,b).

Funkcja rosnąca i wypukła w pewnym przedziale rośnie szybciej niż rosnąca funkcja wklęsła. Funkcja malejąca i wklęsła w pewnym przedziale maleje szybciej niż malejąca funkcja wypukła.

Widać tu, jak ogromne znaczenie w funkcjach opisujących procesy ekonomiczne będzie miało ustalenie jej przedziałów wypukłości.

Wypukłość pozwoli ustalić tempo wzrostu (lub zmniejszania się) wartości funkcji. Nie trzeba tłumaczyć, jak ważne jest pojęcie tempa wzrostu w badaniu procesów ekonomicznych.

Z pochodną drugiego rzędu związany jest p u n k t p r z e g i ę c i a.

Warunek $f''(x_0)=0$ jest warunkiem koniecznym (ale nie wystarczającym) istnienia punktu przegięcia $P=(x_0, f(x_0))$. Natomiast jeśli przy przejściu przez wartość $x = x_0$ pochodna $f''(x)$ zmienia znak, to punkt $P(x_0, f(x_0))$ jest punktem przegięcia.

Inaczej mówiąc, punkt przegięcia oddziela część krzywej, gdzie funkcja jest wypukła, od części, gdzie funkcja jest wklęsła.

Przy przejściu przez ten punkt zmienia się charakter wypukłości funkcji, a więc i tempa jej wzrostu (lub zmniejszania się).

Na prostym przykładzie pokażę, w jaki sposób sporządzić i zinterpretować wykres funkcji.

P r z y k ł a d 3

W przedsiębiorstwie o produkcji jednorodnej dana jest funkcja kosztu (zależnego od wielkości produkcji x) K(x) $=\frac{1}{3}x^3-3x^2+12x+10$, a zależność dochodu przedsiębiorstwa R od wielkości sprzedanej produkcji określa funkcja R(x) = 12x – x^2 + 10. Zbadać, w jaki sposób na zysk Z przedsiębiorstwa wpływa zmiana wytworzonej produkcji.

Należy zbudować funkcję zysku: $Z(x)= R(x)- K(x)= -\frac{1}{3}x^3+2x^2$.

Ustalamy dziedzinę tej funkcji (zakres w jakim może się zmieniać produkcja); $x\in(0,+\infty)$ oznacza to, że produkcja jest wielkością dodatnią i jej wzrost jest nieograniczony.

Miejscem zerowym funkcji Z jest $x=6$

$\lim\limits_{x\to 0^+} Z(x)=0 \quad \lim\limits_{x\to +\infty} Z(x)=-\infty.$

Badamy pochodną pierwszego rzędu funkcji *Z(x)*:

$Z'(x)=-x^2+4x,$

$Z'(x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=4.$

Dla x = 4 może istnieć ekstremum, badamy więc znak pochodnej:

$Z'(x)>0 \quad \Leftrightarrow \quad x\in(0,4),$

$Z'(x)<0 \quad \Leftrightarrow \quad x\in(4,+\infty).$

Na podstawie przytoczonego wcześniej twierdzenia wiemy, że dla $x = 4$ istnieje maksimum oraz, że funkcja Z rośnie w przedziale (0, 4), a maleje dla $x\in(4,+\infty)$.

Obliczamy i badamy pochodną drugiego rzędu:

$Z''(x)=-2x+4$

$Z''(x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=2$

$Z''(x)>0 \quad \Leftrightarrow \quad x\in(0,2)$

$Z''(x)<0 \quad \Leftrightarrow \quad x\in(2,+\infty)$

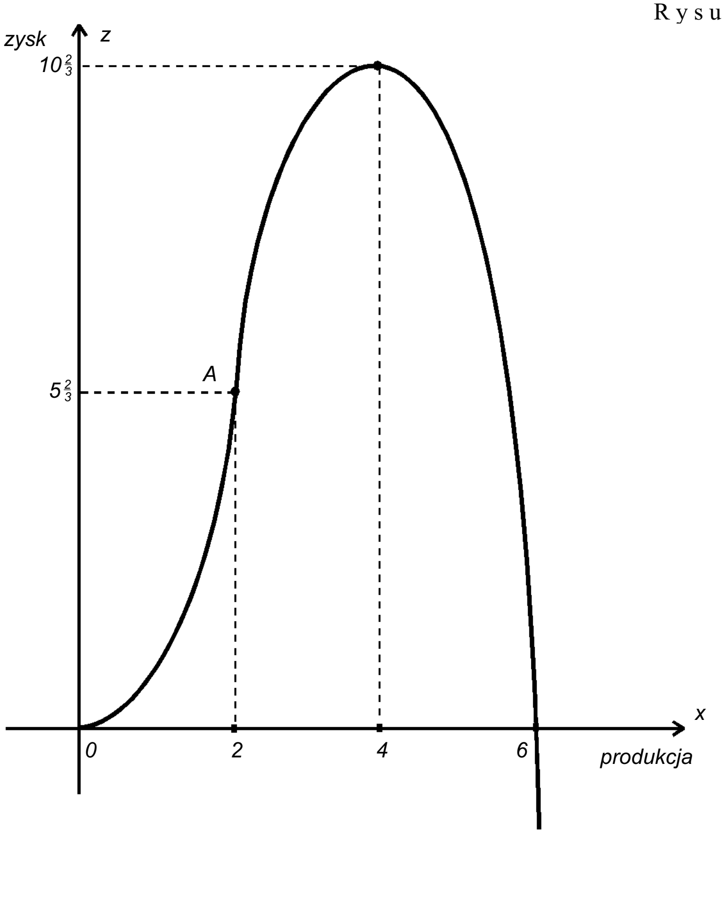
Funkcja jest więc wypukła dla $x\in(0,2)$ i wklęsła dla $x\in(2,+\infty)$, a punkt $A=\left(2,5\frac{1}{3}\right)$ jest jej punktem przegięcia.

Przedstawiamy te informacje w tabelce:

x	(0,2)	2	(2,4)	4	(4,6)	6	$(6,+\infty)$
$Z'(x)$	+		+	**0**	-		-
$Z''(x)$	+	**0**	-		-		-
Z(x)		$5\frac{1}{3}$		$10\frac{2}{3}$		0	
		p.p.		max			

Sporządzamy wykres funkcji (rysunek 4):

Rysunek 4



Spróbujmy zinterpretować ten wykres, posługując się interpretacją pochodnych funkcji.

Zysk przedsiębiorstwa rośnie w przedziale (0 , 4), osiągając wartość maksymalną przy produkcji $x = 4$(j). Jednakże dla $x \in (0,2)$ rośnie szybciej niż w przedziale (2 , 4). W pierwszym z tych przedziałów funkcja jest bowiem wypukła, a w drugim wklęsła.

Punkt $A = \left(2, 5\frac{1}{3}\right)$ jest punktem przegięcia. Po przekroczeniu produkcji x równej 2(j) zmieniło się tempo wzrostu zysku.

Jeżeli natomiast produkcja przekroczy wartość 4 j, zysk bardzo szybko maleje (funkcja zysku jest wtedy wklęsła, malejąca). W stosunkowo niewielkim przedziale zmienności produkcji: dla $x \in (4,6)$, wartość zysku gwałtownie maleje, osiągając wartość zero przy produkcji x wynoszącej 6 j.

Po przekroczeniu tej wartości przedsiębiorstwo zacznie ponosić straty (zysk ujemny). Optymalna dla przedsiębiorstwa jest więc produkcja wynosząca 4 j lub oscylująca wokół tej liczby.

Bez analizy tego wykresu (i samej funkcji) właściciel firmy mógłby wysnuć błędne wnioski: „Skoro zysk firmy początkowo tak wspaniale rósł wraz ze wzrostem produkcji, to dlaczego nie zwiększać tej produkcji nadal...?”.

Mam świadomość, że dla ekonomistów ten przykład może wydać się nieco banalny. Jednocześnie mam nadzieję, że pozwoli on docenić rolę analizy pochodnych funkcji opisujących zależności ekonomiczne.

Zgodnie z zapowiedzią (z punktu 2), pokażę teraz, że koszt przeciętny osiąga minimum przy takiej produkcji, dla której koszt przeciętny jest równy kosztowi krańcowemu.

Funkcja kosztu przeciętnego określona jest jako:

$$K_p(x) = \frac{K(x)}{x}.$$

Aby znaleźć ekstremum tej funkcji, musimy zbadać jej pochodną pierwszego rzędu.

$$K_p'(x) = \frac{K'(x)\cdot x - K(x)\cdot 1}{x^2} = \frac{K_k(x)\cdot x - K(x)}{x^2}$$

$$K_p'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad K_k(x)\cdot x = K(x)$$

$$K_k(x) = \frac{K(x)}{x} \quad \Leftrightarrow \quad K_k(x) = K_p(x)$$

Załóżmy, że x_0 jest rozwiązaniem tego równania.

$$\text{Wówczas: } \left.\begin{array}{lll} K_p'(x_0) = 0 & & \\ K_p'(x) < 0 & dla & x \in (0, x_0) \\ K_p'(x) > 0 & dla & x \in (x_0, +\infty) \end{array}\right\} \Rightarrow dla\ x = x_0 \text{ istnieje minimum funkcji } K_p$$

Można więc teraz spokojnie wyznaczać minimum kosztu przeciętnego, rozwiązując równanie: $K_p(x) = K_k(x)$.

Wyznaczenie produkcji x_0, przy której koszt przeciętny jest najniższy, jest z punktu widzenia przedsiębiorstwa bardzo ważne. Punkt $A = (x_0, K_p(x_0))$ określa tzw. o p t i m u m t e c h n o l o g i c z n e.

Jednakże w dobie gospodarki rynkowej optimum technologiczne nie musi oznaczać, że produkcja x_0 jest optymalna dla przedsiębiorstwa z ekonomicznego punktu widzenia. Na optimum ekonomiczne mają bowiem wpływ jeszcze inne czynniki, jak chociażby poziom cen i oddziaływanie na ich zmiany, chłonność rynku, stopień konkurencyjności itp. Mimo ogromnej wagi optimum technologicznego czynniki te przesądzają o racjonalnym podejmowaniu decyzji dotyczących rozmiarów produkcji.

Niemniej jednak umiejętność wyznaczenia tego punktu może być bardzo przydatna.

Zakończenie

Mam nadzieję, że w tej krótkiej i wycinkowej pracy udało mi się pokazać, jak pomocnym narzędziem w analizie ekonomicznej mogą stać się rozważania prowadzone przez pryzmat analizy matematycznej.

Jednocześnie chciałam wyjaśnić, że wzory funkcji wykorzystanych w przykładach 1–3, jak również występujące w zbiorach zadań dla studentów są tak konstruowane, aby obliczenia były w miarę wygodne. Nie chodzi tu przecież o kształcenie umiejętności arytmetycznych ani o przeprowadzanie żmudnych, czasochłonnych obliczeń czy przekształceń, ale o zrozumienie sensu wykonywanych operacji.

Należy jednak mieć świadomość, że można zbudować wzory oparte na empirycznych danych. Można to zrobić, stosując „metodę najmniejszych kwadratów" do empirycznych punktów. Uzyskuje się wtedy przybliżone równanie krzywej „dopasowanej" do danych punktów.

Stanowi to jednak odrębny temat, którego rozważania w tym artykule nie przewidywałam.

Wzory uzyskane z takich obliczeń byłyby bardziej realistyczne, ale bez wątpienia bardziej uciążliwe w obliczeniach.

Bibliografia

„Matematyka Stosowana. Pismo Polskiego Towarzystwa Matematycznego", nr 2/2001.

F i c h t e n h o l z G. M., *Rachunek różniczkowy i całkowy*, t. I, PWN, Warszawa 1972.

G r y g l a s z e w s k a A., K o s i o r o w s k a M., P a s z e k B., S t a n i s z T., *Zadania z matematyki stosowanej*, Wydawnictwo AE w Krakowie, Kraków 1999.

K u r a t o w s k i K., *Rachunek różniczkowy i całkowy*, PWN, Warszawa, 1973.

L e j a F., *Rachunek różniczkowy i całkowy*, PWN, Warszawa, 1973.

Materiały naukowe z XXX Ogólnopolskiej Konferencji Zastosowań Matematyki, Zakopane 18–25 września 2001, Warszawa 2001.

M i l e w s k i R., *Podstawy ekonomii*, PWN, Warszawa 1998.

S l o m a n J., *Podstawy ekonomii*, PWE, Warszawa 2001.

S t a n i s z T., *Zastosowania matematyki w ekonomii*, Wydawnictwo TRAPEZ, Kraków [2000].

V a r i a n H. R., *Mikroekonomia*, PWN, Warszawa 1997.