

WIT URBAN

Analiza zbieżności funkcji przynależności w rozmytym szeregu czasowym

1. Wstęp

Ważnym aspektem badania zjawisk ekonomicznych jest modelowanie ich dynamiki. Zarówno w statystyce, jak i ekonometrii wykorzystuje się w tym celu szeregi czasowe otrzymane dla wybranych charakterystyk. Poznanie własności tych szeregów pozwala na posłużenie się nimi w procesie formułowania prognoz, jak też w diagnostyce stanu badanych w ten sposób systemów ekonomicznych. Podobne możliwości stwarza również wykorzystanie rozmytych szeregów czasowych oraz używanych do ich analizy metod teorii zbiorów rozmytych. Jednym z działów wspomnianej teorii jest arytmetyka rozmyta, stanowiąca podstawę teoretyczną dla przetwarzania liczb rozmytych. Badania poświęcone problemom zdefiniowanym w ramach w tej części teorii zbiorów rozmytych, mogą stanowić o jej efektywniejszym zastosowaniu także w numerycznych eksperymentach z modelami dynamiki, opisującymi zachowanie badanych systemów. Szczególnie interesujące wydaje się zwłaszcza zjawisko zbieżności funkcji przynależności do pewnej postaci granicznej, w rozmytych szeregach czasowych wygenerowanych dla zmiennych przynajmniej części rozmytych równań różnicowych. Jest ona efektem rejestracji w taki sposób specyficznej postaci chaosu deterministycznego w przestrzeni rozmytych liczb rzeczywistych. W takim też kontekście badawczym mieści się treść artykułu. Stanowi ona prezentację procedury zmierzającej do uzyskania formalnego opisu zbieżności funkcji przynależności do postaci granicznej, wykorzystującej zasady arytmetyki rozmytej oraz wskaźnik pola pod wykresem funkcji przynależności liczby rozmytej.

Dla realizacji powyższego celu przyjęto następujący układ opracowania. Pierwsza jego część stanowi odwołanie do terminologii oraz podstawowych definicji teorii zbiorów rozmytych, ze szczególnym uwzględnieniem arytmetyki rozmytej. Następnie uwaga została zwrócona ku kwestiom związanym z uwarunkowaniami numerycznymi zjawiska chaosu deterministycznego w rozmytych szeregach czasowych. W kolejnej części opracowania znalazły się właściwe rozważania odnośnie do analizy zbieżności funkcji przynależności do postaci granicznej dla przypadku zmiennej rozmytego równania różnicowego. W tym też kontekście występuje propozycja wykorzystania jednego ze wskaźników skalarnej analizy rzeczywistych liczb rozmytych. Opracowanie kończą wnioski.

2. Wybrane elementy teorii zbiorów rozmytych

Podstawą teorii zbiorów rozmytych jest zaproponowane przez L.A. Zadeha [1965] pojęcie zbioru rozmytego.

Definicja 2.1. *Zbiorem rozmytym A w przestrzeni X będącej niepustym zbiorem nazywamy zbiór par uporządkowanych $A = \{x, \mu_A(x): x \in X\}$ gdzie*

$$\mu_A: X \rightarrow [0;1] \quad (2.1)$$

jest funkcją przynależności, której wartości określają stopień przynależności poszczególnych elementów przestrzeni X do zbioru rozmytego A .

Na bazie definicji zbioru rozmytego zostały zdefiniowane podstawowe pojęcia arytmetyki rozmytej, tj. całkowitej liczby rozmytej i rzeczywistej liczby rozmytej.

Definicja 2.2. [A. Kaufmann 1985] *Rozmyta liczba całkowita α jest wypukłym zbiorem rozmytym w przestrzeni Z , przy czym warunek wypukłości ma postać:*

$$\mu_\alpha(k) \geq \mu_\alpha(i) \wedge \mu_\alpha(j) \quad \forall i, j, k \in Z, \quad i \leq k \leq j \quad (2.2)$$

Klasa rozmytych liczb całkowitych jest często oznaczana w literaturze przy pomocy zapisu $N(Z)$.

Uwzględniając powyższą definicję każda liczba całkowita $n \in Z$ może być traktowana jako całkowita liczba rozmyta o funkcji przynależności zdefiniowanej w następujący sposób:

$$\mu_n(k) = \begin{cases} 1 & \text{dla } k = n \\ 0 & \text{dla } k \neq n \end{cases} \quad \forall k \in Z \quad (2.3)$$

Definicja 2.3. [L. A. Zadeh 1975] *Rozmyta liczba rzeczywista jest zbiorem rozmytym w przestrzeni R mającym ciągłą funkcję przynależności μ_α oraz spełniającym warunek wypukłości:*

$$\mu_\alpha(y) \geq \mu_\alpha(x) \wedge \mu_\alpha(z) \quad \forall x, y, z \in R, \quad y \in [x; z] \quad (2.4)$$

Klasę rozmytych liczb rzeczywistych oznacza się z kolei często jako $N(R)$.

Należy zaznaczyć, że w literaturze występuje także określenie rozmytej liczby rzeczywistej nie żądające spełnienia warunku wypukłości funkcji przynależności [W. K. Chang 1984]. Z punktu widzenia takiego podejścia definicja 2.3 odnosi się do podklasy wypukłych rozmytych liczb rzeczywistych. Ponadto w większości publikacji powyższa definicja jest uzupełniana o warunek normalności zdefiniowany w następujący sposób.

Definicja 2.4. [A. Kaufmann 1985] Zbiór rozmyty $A \in P(X)$ (gdzie $P(X)$ oznacza klasę wszystkich zbiorów rozmytych w przestrzeni X) nazywamy normalnym, jeżeli

$$\exists x \in X \mu_A(x) = 1 \tag{2.5}$$

Jeżeli natomiast

$$\forall x \in X \mu_A(x) < 1 \tag{2.6}$$

to zbiór A nazywamy podnormalnym, subnormalnym.

Przedstawione definicje całkowitej liczby rozmytej oraz rzeczywistej liczby rozmytej stanowią, jak to już zostało wspomniane, wprowadzenie do zagadnień arytmetyki rozmytej. Podstawę tej części teorii zbiorów rozmytych związanej z działaniami arytmetycznymi na liczbach rozmytych, oparto na wykorzystaniu zdefiniowanej przez L.A. Zadeha [1975] zasady rozszerzenia.

Definicja 2.5. Niech f będzie odwzorowaniem $X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow Y$, takim że $y = f(x_1, \dots, x_n)$; $y \in Y$, $x_i \in X_i \forall i \in N_n$ oraz niech $A_i \in P(X) \forall i \in N_n$. Iloczyn kartezjański $A_1 \times \dots \times A_n$ przekształcany jest zgodnie z odwzorowaniem f w zbiór rozmyty $B \in P(Y)$ określony funkcją przynależności:

$$\mu_B(y) = \begin{cases} \sup_{\substack{x_1 \in X_1, \dots, x_n \in X_n \\ y = f(x_1, \dots, x_n)}} \min(\mu_{A_1}(x_1), \dots, \mu_{A_n}(x_n)) & \text{dla } f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0 & \text{dla } f^{-1}(y) = \emptyset \end{cases} \quad \forall y \in Y \tag{2.7}$$

Powyższa zasada pozwala znajdować rozmyte odpowiedniki nie rozmytych odwzorowań, poprzez zastąpienie koncepcji zmiennej mającej ściśle określoną wartość podejściem, w którym występuje zbiór stopni przynależności charakteryzujących poszczególne potencjalne jej wielkości.

Wykorzystując powyższą definicję można określić podstawowe operacje arytmetyczne na liczbach rozmytych [G. J. Klir, Y. Pan 1998]. Podane one zostaną dla klasy rozmytych liczb rzeczywistych. Na tej bowiem klasie koncentrują się rozważania, prezentowane w opracowaniu.

Definicja 2.6. Zakładając, że A i $B \in N(\mathbf{R})$ oraz przyjmując:

a) $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ dla operacji dodawania $A + B \in N(\mathbf{R})$

$$\mu_{A+B}(y) = \sup_{\substack{x_1, x_2 \in \mathbf{R} \\ y = x_1 + x_2}} \min(\mu_A(x_1), \mu_B(x_2)) \quad \forall y \in \mathbf{R} \tag{2.8}$$

b) $f(x_1, x_2) = x_1 - x_2$ dla operacji odejmowania $A - B \in N(\mathbf{R})$

$$\mu_{A-B}(y) = \sup_{\substack{x_1, x_2 \in \mathbf{R} \\ y = x_1 - x_2}} \min(\mu_A(x_1), \mu_B(x_2)) \quad \forall y \in \mathbf{R} \tag{2.9}$$

c) $f(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$ dla operacji mnożenia $A \cdot B \ N(\mathbf{R})$

$$\mu_{A \cdot B}(y) = \sup_{\substack{x_1, x_2 \in \mathbf{R} \\ y = x_1 \cdot x_2}} \min(\mu_A(x_1), \mu_B(x_2)) \forall y \in \mathbf{R} \quad (2.10)$$

d) $f(x_1, x_2) = x_1/x_2$ $x_2 \neq 0$ dla operacji dzielenia $A/B \ N(\mathbf{R})$

$$\mu_{A/B}(y) = \sup_{\substack{x_1, x_2 \in \mathbf{R} \setminus \{0\} \\ y = x_1/x_2}} \min(\mu_A(x_1), \mu_B(x_2)) \forall y \in \mathbf{R} \quad (2.11)$$

3) Numeryczne uwarunkowania zjawiska chaosu deterministycznego w rozmytych szeregach czasowych

Jednymi z możliwych źródeł danych rozmytych są modele matematyczne oparte na równaniach różnicowych. Po zastąpieniu skalarnych wartości zmiennych i parametrów takich modeli rzeczywistymi wielkościami rozmytymi, ich równania tworzą swoiste generatory rozmytych szeregów czasowych. Szereg taki jest rozumiany w dalszym ciągu opracowania zgodnie z poniższą definicją.

Definicja 3.1. [Song 1995] Niech $Y(t) \in N(\mathbf{R})$ (przestrzeni rozmytych liczb rzeczywistych), gdzie $t \in T = \{\dots, 0, 1, 2, \dots\}$ oraz na Y są zdefiniowane zbiory rozmyte $f_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots$) tworzące szereg $F(t)$. Wówczas $F(t)$ jest rozmytym szeregiem czasowym dla $Y(t)$, $t \in T$.

Jedną z ważnych koncepcji analizy rzeczywistych danych rozmytych jest metodologia oparta na skalaryzacji, czyli inaczej wyostrzaniu. Polega ona na zastąpieniu danej rozmytej odpowiednio skonstruowanym wskaźnikiem należącym już do przestrzeni liczb rzeczywistych. Tego typu zabieg wiąże się z reguły z utratą części informacji o przebiegu modelowanego procesu. Z drugiej jednak strony w sposób istotny upraszcza procedurę badawczą umożliwiając wykorzystanie klasycznych metod statystycznych.

Należy przy tym jednak pamiętać o istotnej specyfice arytmetyki rozmytej w przestrzeni rozmytych liczb rzeczywistych. Odnosi się ona w szczególności właśnie do modeli matematycznych opartych na równaniach różnicowych. Okazuje się, że równania takie są podatne na występowania zjawiska chaosu deterministycznego, co zostało pokazane w pracach [J. Wołoszyn 2000], [J. Wołoszyn, W. Urban 2000] i [W. Urban 2000] na przykładzie układów nieliniowych. Obraz chaosu w odniesieniu do przestrzeni $N(\mathbf{R})$ jest różny od postaci przyjmowanej w przypadku skalarnych szeregów czasowych. Podstawowym jego wyróżnikiem jest zbieżność funkcji przynależności opisana poniższym wzorem ([Urban 2000]) dla rozmytego szeregu czasowego $\{X_t\}$, gdzie $t = 1, 2, 3, \dots$

$$\forall_{x \in \mathbf{R}} \lim_{t \rightarrow \infty} \mu_t(x_{X_t}) = 1 \quad (3.1)$$

czyli graniczna postać funkcji przynależności przyjmuje postać

$$\mu_\infty(x_X) = 1 \quad (3.2)$$

Oczywiście prezentowana sytuacja ma charakter teoretyczny. W praktyce natomiast, w zależności od rodzaju wybranego matematycznego modelu dynamiki występuje zjawisko łatwe do zweryfikowania za pomocą prostych eksperymentów numerycznych, które można przedstawić za pomocą formuły matematycznej:

$$\exists \quad \forall \quad \lim_{0 < T \ll \infty \quad x_{X_t} \in \mathbf{R} \quad t \rightarrow T} \mu_t(x_{X_t}) \approx 1 \quad (3.3)$$

czyli

$$\mu_T(x_{X_T}) \approx 1 \quad (3.4)$$

Tak więc teoretyczna zbieżność funkcji przynależności rozmytego szeregu czasowego $\{X_t\}$ (gdzie $t = 1, 2, 3, \dots$) do postaci granicznej zachodzi z reguły dużo wcześniej w przetwarzaniu komputerowym, przede wszystkim ze względu na zawsze określony graniczny poziom dokładności arytmetyki zmiennoprzecinkowej. Kwestia wyznaczenia wielkości T jest zależna od rodzaju wykorzystanego układu generującego dane oraz warunków początkowych. Taka sytuacja rzutuje także bezpośrednio na możliwości konstrukcji oraz wykorzystania odpowiednich skalarnych mierników zmienności danych rozmytych. Efektem wpływu chaosu deterministycznego jest bowiem zbieżność ciągu wartości takich wskaźników otrzymanego dla wygenerowanego w oparciu o równanie różnicowe, rozmytego szeregu czasowego do określonej wielkości skalarnej.

4. Badanie tempa zbieżności funkcji przynależności do postaci granicznej dla rozmytych szeregów czasowych

Wnioskiem wynikającym z poprzedniej części artykułu jest konieczność określenia tempa zbieżności funkcji przynależności rozmytego szeregu czasowego, wygenerowanego za pomocą równania różnicowego, do postaci granicznej. Tego typu podejście umożliwia, między innymi, określenie uwarunkowań analizy danych rozmytych otrzymanych w oparciu o określoną postać równań tego rodzaju i przy przyjętych warunkach początkowych

W tym celu można wykorzystać koncepcję skalaryzacji opartą na wskaźniku pola pod wykresem funkcji przynależności rzeczywistej liczby rozmytej [W. Urban 2000]. Dla prezentacji związanych z tym rozważań zostały przyjęte założenia odnośnie do numerycznej strony zagadnienia.

Pierwszym z nich jest przyjęcie aproksymacji funkcji przynależności elementów rozmytych szeregów czasowych za pomocą złożenia funkcji liniowych. Propozycja konstrukcji algorytmu wyznaczenia takiej aproksymacji została przedstawiona w artykule [W. Urban 1999]. Złożenie funkcji liniowych w takim kontekście pozwala na wykorzystanie punktów połączenia wykresów odwzorowań składowych, w notacji rzeczywistej liczby rozmytej, zgodnej z ogólnymi zasadami

zapisu określonymi dla zbiorów rozmytych [L. A. Zadeh 1965]. Punkty te będą w dalszym ciągu określane mianem wierzchołków wykresu funkcji przynależności. Propozycja odpowiedniej modyfikacji wspomnianego zapisu została przedstawiona w [W. Urban 1999].

Drugim założeniem uwzględnionym w badaniach, których rezultaty są prezentowane w niniejszym artykule jest zawężenie analizy zmienności danych rozmytych do takich przedziałów liczbowych zawartych w dziedzinie zdefiniowania funkcji przynależności, poza którymi przyjmuje ona wyłącznie wartości zerowe. Wówczas zapis takiej funkcji przyjmuje postać zgodną z następującym wzorem:

$$\begin{aligned}
 (X \in N(\mathbf{R}) \wedge \exists_{\langle x_1; x_n \rangle} (x_i \notin \langle x_1; x_n \rangle \Rightarrow \mu_X(x_i) = 0)) \Rightarrow \\
 \forall_{x_i \in \langle x_1; x_n \rangle} \mu_X(x_i) = \begin{cases} x_i \in \langle x_1; x_2 \rangle \Rightarrow a_1 x_i + b_1 \\ x_i \in \langle x_2; x_3 \rangle \Rightarrow a_2 x_i + b_2 \\ \dots \\ x_i \in \langle x_{n-1}; x_n \rangle \Rightarrow a_{n-1} x_i + b_{n-1} \end{cases} \quad (4.1) \\
 (\langle x_1; x_2 \rangle \cup \dots \cup \langle x_{n-1}; x_n \rangle) \wedge \forall_{i=1, \dots, n-2} \langle x_i; x_{i+1} \rangle \cap \langle x_{i+1}; x_{i+2} \rangle = \{x_{i+1}\}
 \end{aligned}$$

Wreszcie ostatnie założenie zakłada wykorzystanie tzw. trójkątnych liczb rozmytych zgodnie z definicją przedstawioną w [A. Kaufmann, M. M. Gupta 1985].

Wspomniana koncepcja wyostrażania rzeczywistej liczby rozmytej opiera się na zastosowaniu wskaźnika pola pod wykresem funkcji przynależności zdefiniowanego zgodnie z poniższym wzorem:

$$X \in N(\mathbf{R}) \Rightarrow P_X = \int_{-\infty}^{+\infty} \mu_X(x_X) dx_X \quad (4.2)$$

Przy uwzględnieniu przyjętych założeń można go zmodyfikować zgodnie z następującym schematem:

$$P_X = \int_{\alpha}^{\beta} \mu_X(x_X) dx_X = \sum_{i=1}^{n-1} \left(\int_{i=1}^{y_{i+1}} (a_i x_X + b_i) dx_X \right) \quad (4.3)$$

Nie skomplikowana analiza rozmytego szeregu czasowego, w którym występuje zbieżność opisana wzorami (3.1) i (3.2) pozwala sformułować odpowiadającą temu tezę odnośnie do wyznaczonego dla niego ciągu pól.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_{X_t} = \infty \quad (4.4)$$

W badaniu tempa tej zbieżności wykorzystanie analizy teoretycznej jest bardzo

utrudnione. Dlatego też znacznie wygodniejsze zdają się być badania danych numerycznych pochodzących z eksperymentów symulacyjnych przeprowadzanych dla różnych typów równań różnicowych oraz przy zmiennych warunkach początkowych. Tego typu procedura jest obarczona wadą ograniczonych możliwości wnioskowania. Pozwala jednak poznać istotne własności zależności znajdującej zastosowanie do opisu konkretnego zjawiska. Przykładem jej zastosowania może być analiza przeprowadzona dla modelu (4.5)

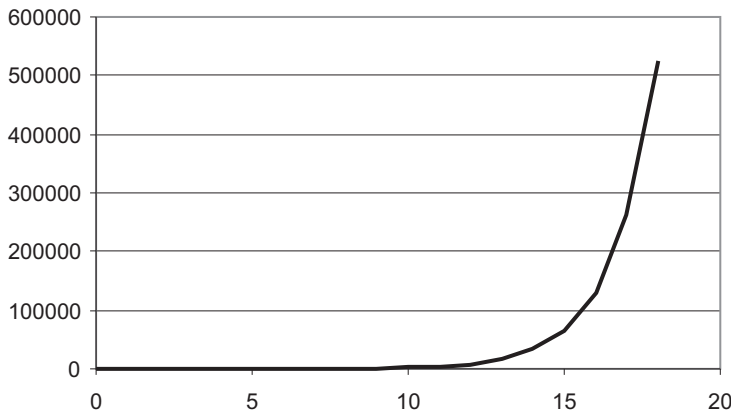
$$\begin{aligned}
 X_{t+1} &= AX_t + B \\
 X_t, A, B &\in N(\mathbf{R}) \\
 A &= \sim 0/1 + \sim 1/2 + \sim 0/3 \\
 B &= \sim 0/0 + \sim 1/0 + \sim 0/2 \\
 X_0 &= \sim 0/1 + \sim 1/2 + \sim 0/3
 \end{aligned}
 \tag{4.5}$$

W zapisie wartości rozmytych wykorzystano wspomniane wcześniej zasady notacji rzeczywistych liczb rozmytych zaproponowane w pracy [W. Urban 1999].

Zmiany w otrzymanym w rezultacie eksperymentu symulacyjnego z powyższym modelem, szeregu czasowym $\{P_X(t)\}$ wartości pól pod wykresem funkcji przynależności zmiennej X_t ilustruje wykres na rysunku 1.

Rysunek 1

Wykres zmian pola pod wykresem funkcji przynależności zmiennej X_t w eksperymencie symulacyjnym z modelem (4.5)



Źródło: opracowanie własne.

Wskazuje on na możliwą zbieżność z graficzną reprezentacją funkcji

$$y = e^t
 \tag{4.6}$$

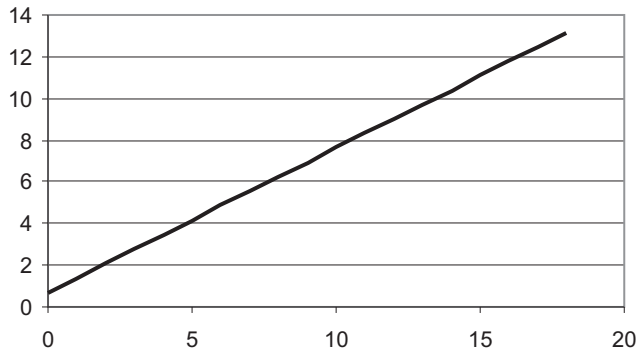
Oczywiście w omawianym przypadku funkcyjny opis zależności przedstawionej na rysunku 1 powinien raczej przyjąć postać hipotetyczną, bardziej złożoną:

$$P_{X_t}(t) = e^{f(t)} \quad (4.7)$$

W celu określenia typu zależności $f(t)$ doświadczalny szereg czasowy pól $\{P_{X_t}(t)\}$ poddano logarytmowaniu, otrzymując wykres na rysunku 2. W operacji tej posłużono się logarytmem naturalnym.

Rysunek 2

Wykres logarytmowanych wartości doświadczalnych szeregu czasowego pól $\{P_{X_t}(t)\}$ dla modelu (4.5)



Źródło: opracowanie własne.

Parametry wyraźnie liniowej zależności

$$f(t) = at + b, \quad (4.8)$$

można łatwo estymować za pomocą metody najmniejszych kwadratów, otrzymując ostatecznie zapis równania regresji liniowej

$$f(t) = 0,693147181t + 0,693147181 \quad (4.9)$$

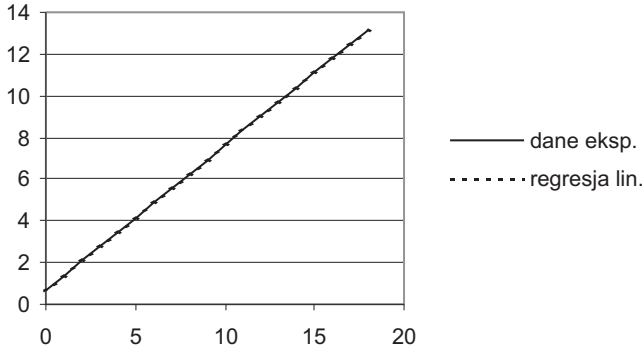
Wykres porównawczy obejmujący dane eksperymentalne otrzymane w oparciu o logarytmowanie szeregu $\{P_{X_t}(t)\}$ oraz wartości teoretyczne wyznaczone za pomocą tego równania prezentuje rysunek 3.

Ostatecznie zależność (4.7) ulega zdefiniowaniu w następujący sposób dla rozważanego przypadku modelu (4.5):

$$P_{X_t}(t) = e^{0,693147181t + 0,693147181} \quad (4.10)$$

Rysunek 3

Porównanie logarytmowanego szeregu czasowego $\{P_X(t)\}$ (wielkości z eksperymentu symulacyjnego) oraz wartości wyznaczonych za pomocą równania regresji liniowej (4.9)

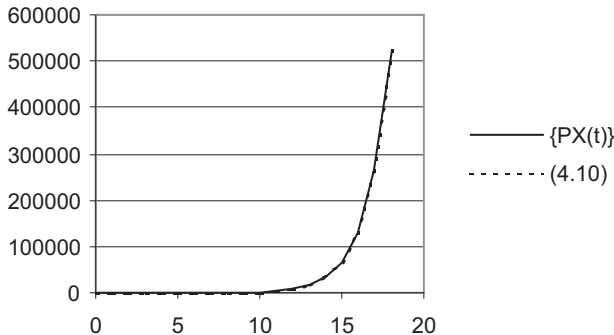


Źródło: opracowanie własne.

Wykresy dla szeregów czasowych $\{P_X(t)\}$ oraz wygenerowanego za pomocą funkcji opisanej powyższym wzorem przedstawia rysunek 4.

Rysunek 4

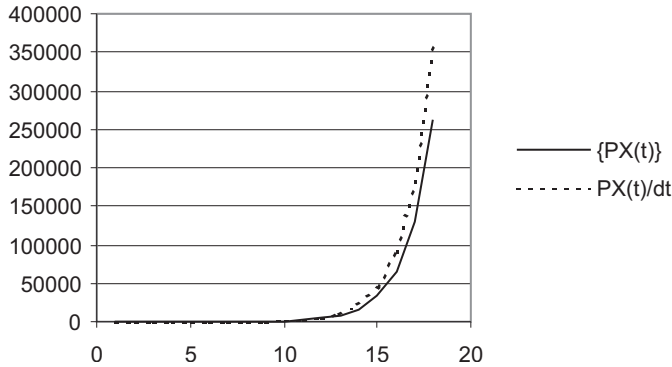
Zestawienie wykresów opisujących dynamikę pola pod wykresem funkcji przynależności zmiennej X_t modelu (4.5), otrzymanych dla wartości szeregu eksperymentalnego $\{P_X(t)\}$ oraz wielkości wygenerowanych za pomocą zależności (4.10).



Źródło: opracowanie własne.

Innym potwierdzeniem zilustrowanej w ten sposób zbieżności może być rysunek 5. Zawiera on porównanie wykresów różnic obliczonych dla szeregu pochodzącego z eksperymentu symulacyjnego $\{P_X(t)\}$ i ich aproksymacji wyznaczonych z pochodnej zależności (4.10)

$$\frac{P_{X_t}(t)}{dt} = 0,693147181e^{0,693147181t+0,693147181} \tag{4.11}$$



5. Wnioski

Przedstawiona procedura analizy zbieżności funkcji przynależności zmiennej rozmytej określonego równania różnicowego, przy zdefiniowanych warunkach początkowych pozwala na podanie charakterystyk ilościowych tego procesu. Daje także w ten sposób możliwość jego dalszych analiz statystycznych w kontekście badań nad własnościami równań różnicowych przy uwzględnieniu wykorzystania metod teorii zbiorów rozmytych. Tego typu podejście może wiązać się z lepszym poznaniem dynamiki zjawisk modelowanych w przestrzeni rzeczywistych liczb rozmytych. Z drugiej zaś strony powinno pozwolić na wypracowanie efektywniejszej metodologii modelowania procesów ekonomiczno-społecznych opartej na wspomnianej wcześniej teorii, przede wszystkim dla celów eksperymentów symulacyjnych.

Bibliografia

- Anile A.M., Deodato S., and Privitera G., *Implementing fuzzy arithmetic*, Dipartimento Di Matematica, Università Degli Studi Di Catania, Italy 1994.
- Chang W. K., Chów L. R., Chang S. K., *Arithmetic operations on level sets of convex fuzzy numbers*, Fuzzy Sets and Systems, 1984.
- Forrester J. W., *Principles of systems, Industrial Dynamics* (MIT Press, Cambridge Mass.), 1961, 1968.
- Hanczar P., *Symulowane wyżarzanie — optymalizacja procesów logistycznych [w:] Ekonometria czasu transformacji*, praca zbiorowa pod redakcją A. S. Barczaka, WU AE, Katowice 1998.
- Homer J. B., *Why we iterate: scientific modeling in theory and practice*, „System Dynamics Review”, Vol. 12, Spring 1996, p. 1—19.
- Kaufmann A., Gupta M. M., *Introduction to Fuzzy Arithmetic: Theory and Applications*, New York: Van Nostrand, 1985.

- Klir G. J., Pan Y.: *Constrained fuzzy arithmetic: Basic questions and some answers*, Soft Computing 2 (1998), No. 2, 100—108. 7
- Munakata Y., *Fuzzy systems: An Overview Communications of the ACM*, Vol. 37, No 3, March 1994, page 69—76.
- Navara M., Zabokrtsk'y Z.: *Computational problems of constrained fuzzy arithmetic*. In: *The State of the Art in Computational Intelligence*, P. Sinc'ak, J. Vasc'ak, V. Kvasnicka and R. Mesiar (eds.), Physica-Verlag, Heidelberg/New York, 2000, 95—98.
- Resnick R., Halliday D., *Fizyka*, PWN, Warszawa 1973.
- Schuster H. G.: *Chaos deterministyczny. Wprowadzenie*, PWN, Warszawa 1995.
- Song Q., Leland R.P. and Chissom B.S., *A new fuzzy time-series model of fuzzy number observations*, „Fuzzy Sets and Systems”, Vol. 73, August 1995, p. 341—348.
- Turksen L. B., *Stochastic Fuzzy Sets*, A Survey Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems series, Vol. 310, Springer 1988, p. 168—183.
- Urban W., *Wykorzystanie teorii grawitacji w analizie funkcyjowania systemów społeczno-ekonomicznych*, ZN AE, Kraków 2002.
- Urban W., *Wprowadzenie do skalarnej analizy chaosu deterministycznego w przestrzeni rozmytych liczb rzeczywistych*, ZN AE, Kraków 2001.
- Urban W., *Podstawy rozmytej dynamiki systemowej*, AE, Kraków 1999.
- Wołoszyn J., Urban W., *Symulacyjna aproksymacja uwarunkowań numerycznych wykorzystania ogólnej teorii grawitacji do opisu relacji społeczno-ekonomicznych*, ZN AE, Kraków 2002.
- Wołoszyn J., Urban W., *Koncepcja filtru aproksymująco-przeskalowującego w działaniach arytmetyki rozmytej*, AE Kraków 2001.
- Wołoszyn J., *Elementy teorii chaosu deterministycznego w badaniach systemów ekonomicznych*, ZN AE nr 551, Kraków 2000.
- Wołoszyn J., *Grafy rozmyte i możliwości ich wykorzystania w ekonomii*, Zeszyty Naukowe AE, Seria specjalna; monografie, Nr 90, Kraków 1990.
- Zadeh L. A., *Fuzzy Logic, Computing with Words*, IEEE Transactions on Fuzzy Systems, Vol. 4, May 1996, p. 103—111.
- Zadeh L. A., *Fuzzy sets and their application to pattern classification and clustering analysis* in [VanRysin1977].
- Zadeh L.A., *Fuzzy sets*, „Information and control” 1965, no. 8.
- Zieliński J. S., *Inteligentne systemy w zarządzaniu. Teoria i praktyka*, praca zbiorowa, PWN, Warszawa 2000.

