Paweł Wołoszyn

Ergodyczność i własność mieszania w chaotycznej dynamice systemów komputerowych

1. Wstęp

System dynamiczny może prezentować cechy chaosu, jeżeli spełnia pewne konieczne warunki wynikające bezpośrednio z mechanizmu powstawania złożoności chaotycznych zachowań. Warunki owe dotyczą dynamiki systemu determinującej sekwencję kolejnych stanów przyjmowanych w czasie jego ewolucji, z których każdy następny jest wynikiem poddania stanu poprzedniego określonemu przekształceniu. Szczegółowa postać tego przekształcenia decyduje o zachowaniu się systemu, dlatego też właśnie tutaj należy poszukiwać źródeł chaosu deterministycznego.

Z matematycznego punktu widzenia wspomniane przekształcenie jest funkcją wektorową, która przeprowadza punkty przestrzeni zmiennych stanu systemu na inne punkty tej przestrzeni. W zależności od tego, czy dany system ma charakter dyskretny czy ciągły, inny jest sposób określania dynamiki systemu za pomocą takiej funkcji. W przypadku systemów dyskretnych jest ona elementem równania iteracyjnego postaci:

$$x_{k+1} = f(x_k), \tag{1}$$

gdzie x_k jest punktem przestrzeni stanów $X \subset R^n$, k jest indeksem dyskretnej chwili czasu, przy czym k, $n \in N$. Z kolei dynamikę systemów ciągłych można opisać równaniem różniczkowym:

$$\dot{x} = g(x, t), \tag{2}$$

gdzie t oznacza czas. W obu przypadkach dla pełnego opisu zachowania systemu konieczne jest podanie stanu początkowego x_0.

Funkcje f oraz g odmiennie determinują cechy dynamiczne systemu, równanie iteracyjne bowiem w sposób jawny określa zależność między poprzednim a następnym stanem systemu, równanie różniczkowe natomiast w bardziej wyrafinowany sposób wiąże stan systemu z jego zmianami. W przypadku systemów ciągłych można jednak równanie różniczkowe zastąpić równaniem iteracyjnym korzystając z pewnego przekroju Poincarégo i definiując przekształcenie p, które przeprowadza punkty trajektorii systemu leżące na tym przekroju w ich obrazy będące punktami następnego powrotu trajektorii do tego przekroju. Dzięki tak określonemu przekształceniu Poincarégo dynamikę systemu ciągłego można, po zawężeniu obserwacji do wybranego przekroju, opisać podobnym do (1) równaniem:

$$x_{k+1} = p(x_k), \tag{3}$$

gdzie k numeruje chronologicznie punkty, w których trajektoria systemu przebija wybrany przekrój. Dla niektórych systemów o dynamice ciągłej można przekształcenie Poincarégo wyznaczyć w prosty sposób na podstawie równania różniczkowego, wybierając odpowiednio przekrój i wyznaczając współrzędne kolejnych powrotów trajektorii do tego przekroju. Przejście od postaci różniczkowej do postaci iteracyjnej równania systemu może być jednak bardzo trudne w wielu przypadkach, gdy przekształcenie p nie jest jawnie określone ani nie daje się łatwo wyznaczyć analitycznie.

2. Systemy ergodyczne i mieszające

Czynnikiem generującym zachowania chaotyczne systemów opisanych równaniem iteracyjnym jest własność mieszania iterowanego przekształcenia. Własność mieszania oznacza, że przekształcenie powtarzane wielokrotnie stopniowo coraz bardziej równomiernie rozprowadza punkty dowolnego zbioru przestrzeni stanów po całej dostępnej przestrzeni. Bardziej formalnie własność tę sformułował Gibbs w odniesieniu do ciągłych systemów mechanicznych [J. R. Dorfman 2001], można jednak analogiczną definicję podać dla systemów iteracyjnych.

Dany jest system opisany równaniem (1), przy czym w przestrzeni X znajduje się zbiór możliwych stanów systemu Ω, zaś μ jest miarą określoną na X. Niech $P \subset \Omega$ oznacza zbiór punktów początkowych, $T^k(P)$ będzie obrazem zbioru P po k-tej iteracji przekształcenia T zachowującego miarę. Przekształcenie T posiada własność mieszania, jeżeli dla każdego zbioru $Q \subset \Omega$ o niezerowej mierze zachodzi równość:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\mu(Q \cap T^k(P))}{\mu(Q)} = \frac{\mu(P)}{\mu(\Omega)} \tag{4}$$

przy założeniu, że miara $\mu(\Omega)$ jest skończona i różna od zera.

Własność mieszania jest powiązana z pojęciem ergodyczności rozważanym w mechanice statystycznej. Pierwotne sformułowanie tego pojęcia podane przez Boltzmanna stwierdzało, że system ergodyczny porusza się po swoich trajektoriach o ustalonej energii w ten sposób, iż w obszarach o jednakowej mierze przebywa jednakowo długo. Własność ergodyczności daje się równoważnie określić jako nierozkładalność metryczna przestrzeni stanów systemu na dwa lub więcej podzbiorów niezmienniczych niezerowej miary, w których rozpoczynające się trajektorie pozostają nieskończenie długo. To drugie sformułowanie pozwala odnieść własność ergodyczności do systemów iteracyjnych.

Jeżeli system posiada własność mieszania, to jest także ergodyczny, mieszanie jest bowiem szczególnym rodzajem zachowania ergodycznego. W przestrzeni stanów nierozkładalnej metrycznie trajektoria systemu przebiega niemal wszystkie punkty, z wyjątkiem zbiorów miary zero. Jednakże sama ergodyczność nie implikuje zachowania chaotycznego, bowiem blisko rozpoczynające się trajektorie mogą przez cały czas pozostawać bliskie. Natomiast jeżeli w systemie obecna jest własność mieszania, to każdy niezerowej miary zbiór dowolnie bliskich punktów początkowych zostanie z biegiem czasu rozprzestrzeniony wśród wszystkich innych możliwych stanów systemu. Z początku bliskie trajektorie będą zatem rozbiegać się w przestrzeni stanów, co oznacza silną wrażliwość na warunki początkowe. Systemy mieszające wykazują więc zachowanie chaotyczne.

Przekształcenie iterowane w systemie dyskretnym musi być nieliniowe, aby posiadało własność mieszania. Przekształcenia liniowe nie powodują wymieszania punktów przestrzeni stanów, a jedynie ich proporcjonalne przeskalowanie lub przesunięcie. Klasycznym przykładem nieliniowego przekształcenia posiadającego własność mieszania jest *rozciąganie-i-składanie* porównywane tradycyjnie do procedury wyrabiania ciasta. Jest to w istocie cała klasa przekształceń, do której należy szereg różnych funkcji, między innymi odwzorowanie logistyczne

$$L(x) = cx(1 - x) \tag{5}$$

lub odwzorowanie Hénona

$$H(x, y) = (y + 1 - ax^2, bx), \tag{6}$$

gdzie a, b oraz c są pewnymi stałymi [E. Ott 1995].

Iterowane w dyskretnych krokach przekształcenie może posiadać własność mieszania w przestrzeni o dowolnej liczbie wymiarów. Przytoczone powyżej przykłady przekształceń dotyczą przestrzeni o jednym (odwzorowanie logistyczne) lub dwóch wymiarach (odwzorowanie Hénona). W przypadku systemów o dynamice ciągłej istnieje dolne ograniczenie liczby wymiarów przestrzeni fazowej, w której może wystąpić zachowanie chaotyczne. Ograniczenie to wynika z determinizmu uniemożliwiającego krzyżowanie się trajektorii systemu. Konieczne jest istnienie co najmniej trzech wymiarów, aby stworzyć przestrzeń pozwalającą wymieszać ciągłe trajektorie bez ich wzajemnego przecinania się.

3. Przestrzeń stanów systemu komputerowego

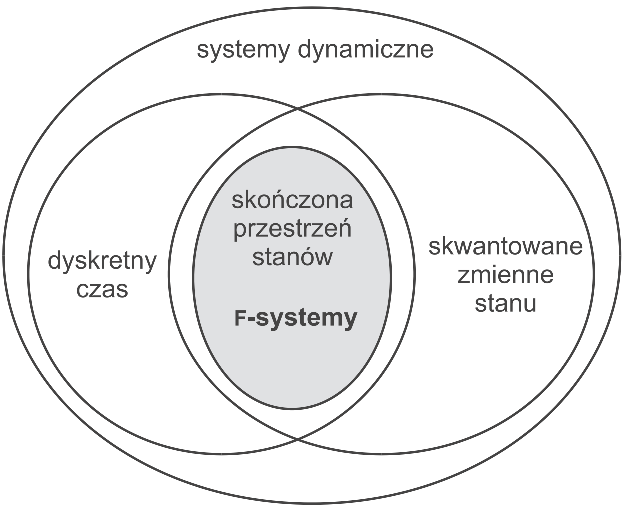
Współczesne komputery są doskonałym narzędziem badawczym przydatnym do modelowania dynamiki złożonych systemów, zwłaszcza takich, które wykazują zachowania chaotyczne. Specyfika technologii cyfrowej zastosowanej do budowy komputerów nakłada na możliwości tego narzędzia pewne istotne ograniczenia, które jednak nie stwarzają przeszkody w wykorzystaniu komputerów do badań chaosu. Pomimo to z punktu widzenia teorii matematycznej systemy dynamiczne modelowane za pomocą komputera stanowią jedynie przybliżenie pewnych cech granicznych, jak mieszanie czy ergodyczność trajektorii, które ujawniają się dopiero w nieskończonych interwałach czasu ewolucji systemów. Przybliżenie to jest tym lepsze, im większa jest dokładność obliczeń prowadzonych przy użyciu komputera.

Czas płynący w systemach komputerowych jest z natury dyskretny. Jest to konsekwencja dyskretności algorytmów symulacyjnych, jakie mogą być wykonywane przez maszyny cyfrowe. Modelowane systemy opisywane są poprzez iterację pewnego przekształcenia bądź zadanego w sposób jawny w przypadku systemów *a priori* dyskretnych, bądź określonego równaniami różnicowymi zastępującymi równania różniczkowe, określające dynamikę systemów ciągłych. Iteracyjna postać systemu sama w sobie nie stanowi bariery dla chaosu deterministycznego, którego obecność jest udowodniona dla wielu systemów dyskretnych.

Drugą cechą charakterystyczną dla komputerowych systemów dynamicznych jest skwantowana postać zmiennych stanu, wynikająca z cyfrowego charakteru sygnałów przetwarzanych przez komputer, które to sygnały mogą przyjmować je-

Rysunek 1

F-systemy jako podklasa systemów dynamicznych



dynie skończony zbiór wartości. Przestrzeń fazowa systemu komputerowego jest zatem zbiorem skończonym, choć jej teoretyczny odpowiednik jest zbiorem nieprzeliczalnym. Przestrzeń ta nie jest także zbiorem gęstym. Miara dowolnego podzbioru tej przestrzeni, jak i jej samej, ma wartość zerową. Powyższe właściwości nadają systemom komputerowym szczególne cechy, które odróżniają je od klasycznych systemów dynamicznych, poruszających się w continuum liczb rzeczywistych.

Dla podkreślenia tych różnic deterministyczne iteracyjne systemy dynamiczne, których przestrzeń fazowa jest zbiorem skończonym, będą dalej nazywane F-systemami (rysunek 1).

4. Ergodyczność w skończonej przestrzeni stanów

Cechy przestrzeni fazowej F-systemów uniemożliwiają bezpośrednią adaptację pojęć dynamiki systemów chaotycznych. Niech X^F oznacza przestrzeń stanów F-systemu będącą skończonym podzbiorem przestrzeni X. Jeżeli μ jest miarą określoną na X, to

$$\mu(X^F) = 0, \tag{7}$$

wobec czego nie można rozważać rozkładalności lub nierozkładalności metrycznej X^F na podzbiory niezerowej miary, gdyż

$$\forall P \subset X^F \quad \mu(P) = 0 \tag{8}$$

Nie można zatem również sformułować warunku ergodyczności systemu ani określić własności mieszania.

W F-systemie może istnieć jedynie skończona liczba nie przecinających się różnych trajektorii, nie większa od liczby punktów przestrzeni fazowej. W skończonej liczbie iteracji system wykorzysta wszystkie dostępne punkty, po czym zacznie przechodzić powtórnie przez te same stany w identycznej kolejności. Wszystkie trajektorie są wobec tego cykliczne i mają skończoną długość, co jest istotną różnicą w stosunku do klasycznego zachowania chaotycznego, gdzie punkty okresowe są gęsto rozmieszczone, lecz sąsiadują dowolnie blisko z trajektoriami nieokresowymi.

Klasyczne określenie ergodyczności zaczerpnięte z mechaniki statystycznej nie daje się wprost zastosować do F-systemów. Punkty poszczególnych orbit okresowych w takich systemach stanowią rozłączne podzbiory niezmiennicze względem iterowanego przekształcenia o tej samej mierze, co cała przestrzeń fazowa. Gdyby zatem miały istnieć trajektorie ergodyczne w takiej przestrzeni, nie różniłyby się one od trajektorii regularnych, jedne i drugie bowiem przechodzą przez wszystkie punkty przestrzeni fazowej, z pominięciem pewnej ich skończonej liczby. Podobnie własność mieszania zdefiniowana dla ciągłych systemów dynamicznych nie może być bezpośrednio zastosowana w przypadku F-systemów. Mianowniki ułamków we wzorze (4) przyjmują bowiem za każdym razem wartości zerowe.

Można podjąć próbę adaptacji pojęć ergodyczności i mieszania do specyfiki F-systemów pokonując przeszkodę, jaką stwarza zerowa miara skończonej przestrzeni fazowej. W tym celu miarę określoną w tej przestrzeni można zastąpić mocą zbioru punktów tej przestrzeni. Ta ostatnia wielkość przyjmować będzie skończone wartości naturalne, dlatego też nie będzie można wykorzystać jakościowego rozróżnienia pomiędzy skończonym i nieskończonym podzbiorem przestrzeni fazowej. Wynika stąd, że odpowiednik ergodyczności dla F-systemów, nazywany dalej F-ergodycznością, będzie cechą ilościową.

Stopniem λ F-ergodyczności iteracyjnego systemu dynamicznego o skończonej przestrzeni fazowej będzie stosunek mocy zbiorów:

$$\lambda = \frac{|U|}{|X^F|}, \tag{9}$$

gdzie U oznacza największy podzbiór przestrzeni X^F niezmienniczy i nierozkładalny na mniejsze rozłączne podzbiory również niezmiennicze względem iterowanego przekształcenia. Stopień F-ergodyczności może przyjmować wartości z przedziału (0, 1].

System F-ergodyczny w stopniu 1 przebiega całą przestrzeń fazową, której nie da się rozłożyć na odrębne podzbiory zamykające trajektorie, rozpoczynające się w ich obrębie. Po przeciwnej stronie skali znajdują się F-systemy, których wszystkie punkty przestrzeni fazowej są punktami stałymi. Duży stopień F-ergodyczności nie musi jednak oznaczać, że w dynamice systemu obserwuje się długie trajektorie okresowe, ponieważ iterowane przekształcenie może nie być funkcją różnowartościową. Przykładem silnie F-ergodycznego systemu bez długich trajektorii okresowych jest system określony w przestrzeni kolejnych liczb naturalnych 0, 1, 2, ... k za pomocą przekształcenia:

$$f(n) = \begin{cases} n+1 & \text{dla } n < k \\ n & \text{dla } n = k \end{cases} \tag{10}$$

Zamiast poruszać się po trajektorii okresowej system zatrzymuje się w punkcie stałym po co najwyżej k początkowych iteracjach. Największym nierozkładalnym podzbiorem niezmienniczym względem tego przekształcenia jest jednak cała dostępna przestrzeń fazowa.

5. Problem własności mieszania

Zastąpienie miary podzbiorów przestrzeni fazowej ich mocą nie rozwiązuje jednak trudności przeniesienia własności mieszania na F-systemy. Analogiczne do równania (4) wyrażenie z użyciem mocy zbiorów miałoby postać:

$$\lim_{k \to \infty} \frac{|Q \cap T^k(P)|}{|Q|} = \frac{|P|}{|\Omega|} \tag{11}$$

przy zachowaniu tych samych oznaczeń. W definicji mieszania dla systemów ciągłych konieczne jest założenie, że przekształcenie T zachowuje miarę. Analogiczne założenie dla F-systemów będzie wymagać, aby przekształcenie T zachowywało moc zbioru, a więc aby było różnowartościowe. Innymi słowy T musi być permutacją. W przeciwnym wypadku zamiast mieszania punktów przekształcenie będzie zastępować różne punkty pojedynczymi.

Mimo wprowadzonej modyfikacji wyrażenie (11) w dalszym ciągu nie daje się wykorzystać do określenia własności mieszania. Różnowartościowe przekształcenie iterowane w skończonym zbiorze Ω musi być okresowe, przez co ciąg w symbolu granicy nie będzie zbieżny. Dowolny podzbiór P przestrzeni fazowej po pewnej liczbie iteracji przejdzie z powrotem w siebie samego i system powróci do stanu wyjściowego, czyli

$$\exists k \in N, k \leq |X^F| : T^k(P) = P \tag{12}$$

W miarę kolejnych iteracji przekształcenia punkty podzbioru P mogą zostać przemieszane z pozostałymi punktami przestrzeni fazowej, w pewnej chwili osiągając największy stopień rozproszenia. Dalsze iteracje będą jednak przywracały pierwotne położenie punktów tak, aż ponownie ułożą się one w podzbiór P. Przypomina to tasowanie talii kart poprzez powtarzanie ustalonego sposobu ich przekładania. Po pewnej liczbie przełożeń karty sąsiadujące początkowo ze sobą znajdą się w różnych miejscach talii, po dalszych przełożeniach talia odzyska układ wyjściowy i cykl zacznie się powtarzać.

Własność mieszania F-systemu, bez względu na dokładną jej definicję, będzie zatem ujawniała się okresowo podczas ewolucji systemu, nie zaś w granicy nieskończonej liczby iteracji. Sformułowanie własności mieszania dla F-systemu nie może więc zawierać wyrażenia podobnego do (11). Zaproponowanie precyzyjnej definicji takiej własności wymaga dalszych prac, a w szczególności rozważenia następujących problemów:

1. Interpretacja ilościowej natury mieszania. Podobnie, jak w przypadku F-ergodyczności, mieszanie w systemie o skończonej przestrzeni stanów jest cechą ilościową. Wszystkie F-systemy są mieszające w pewnym stopniu. Określenie różnic między systemem słabo i silnie mieszającym wymaga podjęcia próby sformalizowania subtelnego filozoficznie rozróżnienia między porządkiem i chaosem.

2. Ustalenie miary równomierności rozproszenia podzbioru przestrzeni stanów. Skończona liczba punktów poddawanych iteracyjnie danemu przekształceniu może nie dać się rozprowadzić równomiernie wśród skończonej liczby wszystkich punktów przestrzeni, na przykład gdy jako przekształcany podzbiór zostanie wy-

brana cała przestrzeń, z wyjątkiem jednego punktu. Pewnym sposobem rozwiązania tego problemu może być zastosowanie miar statystycznych.

3. Określenie chwili największego rozproszenia podzbioru przestrzeni stanów. W przypadku iteracyjnych systemów mieszających w sensie klasycznym największe rozproszenie osiąga się po nieskończonej liczbie iteracji. W przypadku F-systemów, które z natury wykazują zachowanie okresowe, największe wymieszanie pojawia się wielokrotnie i cyklicznie ustępuje miejsca powracającemu porządkowi wyjściowemu.

Własność mieszania F-systemu powinna także pozostawać w takim samym związku z F-ergodycznością, jak ma to miejsce w przypadku klasycznych systemów mieszających. Prawdziwe powinno zatem być twierdzenie: jeżeli F-system jest mieszający w stopniu λ, to jest także F-ergodyczny w stopniu co najmniej równym λ. Z kolei z F-ergodyczności nie powinna wynikać własność mieszania. Dla przykładu można rozważyć system poruszający się w przestrzeni kolejnych liczb naturalnych 0, 1, 2, ... k zadany przekształceniem:

$$f(n)=\begin{cases} n+1 & \text{dla } n<k \\ n & \text{dla } n=k \end{cases} \tag{13}$$

Tak określony system jest F-ergodyczny w stopniu 1, ale intuicyjnie łatwo można dostrzec, że nie powinien zostać uznany za mieszający.

6. Chaos w eksperymentach komputerowych

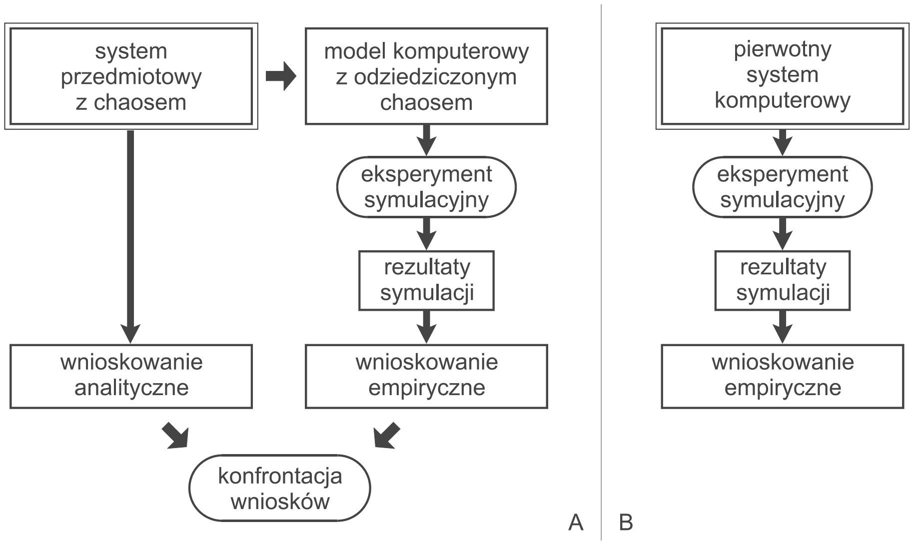
Przeniesienie pojęć ergodyczności i mieszania na F-systemy wydaje się zabiegiem istotnym z punktu widzenia badań dynamiki systemów modelowanych za pomocą komputerów, a więc iteracyjnych deterministycznych systemów o skończonych przestrzeniach fazowych. Dotyczy to szczególnie modeli, które nie są wynikiem kwantyzacji lub dyskretyzacji pewnych systemów dynamicznych opisanych z góry znanymi funkcjami, w tym bowiem ostatnim przypadku własności mieszania lub ergodyczności, a co za tym idzie całe zachowanie chaotyczne, są dziedziczone z oryginalnego systemu do jego cyfrowego przybliżenia. Systemy komputerowe modelujące znane chaotyczne zjawiska nie wymagają dodatkowego badania pod kątem występowania chaosu, ponieważ są tylko przybliżeniami już wcześniej zbadanych systemów.

Odmiennie przedstawia się sytuacja złożonych systemów komputerowych, które same w sobie stanowią źródło zachowań chaotycznych. Iterowane przekształcenie może nie być znane dla takiego F-systemu, a jedynym źródłem informacji o własnościach tego przekształcenia może być ciąg wartości zmiennych stanu systemu podlegającego ewolucji w pamięci komputera. Sformułowanie pewnych wniosków o ergodyczności czy mieszającej naturze iterowanego przekształcenia nie może opierać się w takim przypadku na podejściu analitycznym, lecz empirycznym (rysunek 2). Badanie chaosu w F-systemach stawia badacza w niewygodnym położeniu, w którym musi on niekiedy przyjmować wnioski silnie zależne od technicznych możliwości prowadzenia eksperymentów. Zależność ta jest wyraźnie widoczna podczas badania długości okresu orbity, po której porusza się system.

O tym, jak duża może być liczba iteracji, w czasie których okresowe zachowanie nie zdąży się ujawnić, decyduje największa z długości orbit przebiegających w przestrzeni fazowej, to zaś zależy od przyjętej binarnej reprezentacji liczb w konkretnym algorytmie obliczeniowym. Algorytm zapisany w języku C++ operujący na zmiennych typu *long double* dysponuje zmiennopozycyjnym zapisem liczb długości 10 bajtów (w niektórych platformach systemowych jest to 8 bajtów). W tym zapisie 64 bity przeznaczone są dla mantysy, co przy założeniu, że cecha i znak liczby nie zmieniają się w kolejnych iteracjach, daje zbiór 2^{64} możliwych do zapisania wartości. Najdłuższa orbita okresowa w jednowymiarowej przestrzeni stanów może zatem mieć długość rzędu około 10^{19} iteracji, choć wielkość tego wykładnika może być różna w zależności od tego, jak zmienia się cecha liczby w zapisie zmiennopozycyjnym podczas iteracji.

Rysunek 2

Różnice w procesie badania komputerowych systemów dynamicznych wzorowanych na znanym systemie przedmiotowym (A) oraz bez pierwowzoru (B)



Liczba 10^{19} iteracji w dużym stopniu przekracza możliwości techniczne współczesnych komputerów, zarówno pod względem czasu trwania obliczeń, jak i pojemności pamięci niezbędnej do zapisania wyników symulacji. Orbity o tak długim okresie są dla eksperymentatora nieodróżnialne od trajektorii nieokresowych. W rzeczywistości należy spodziewać się jednowymiarowych orbit okresowych krótszych niż 10^{19} iteracji, spośród bowiem wszystkich 2^{64} dopuszczalnych wartości wiele punktów może być zajętych przez orbity o krótszym okresie.

Wprowadzenie dwóch lub większej liczby wymiarów do przestrzeni fazowej modelowanego systemu zwiększa wykładniczo liczbę możliwych stanów, a co za tym idzie maksymalną długość orbit okresowych. Przy stosunkowo niedużej precyzji zapisu liczb (19 cyfr dziesiętnych w przypadku typu *long double*), wprowadzając wiele zmiennych stanu łatwo można przekroczyć najbardziej podstawowe ograniczenia czasu trwania obliczeń niezbędnych do powrotu trajektorii do punktu początkowego. Dla 10 zmiennych wyliczenie bez powtórzeń wszystkich możliwych stanów systemu musiałoby zająć ponad $3 \cdot 10^{172}$ lat przy szybkości obliczeń 10^{12} iteracji na sekundę.

7. Podsumowanie

Bogactwo zachowań F-systemów tworzonych za pomocą komputerów stwarza istotny problem natury praktycznej: w jaki sposób rozpoznać i zmierzyć takie cechy, jak ergodyczność lub mieszanie, w systemie, którego zachowanie można poznać jedynie w bardzo ograniczonym zakresie, zaś iterowane przekształcenie pozostaje nieznane. System tego rodzaju można porównać do automatu w postaci czarnej skrzynki zapisującej na papierowej wstędze pewne liczby. Zadaniem badacza w tej analogii jest ocena, jak bardzo chaotyczny jest ciąg liczb zapisywany przez automat, przy czym z góry wiadome jest, że ciąg ten powtarza się okresowo, choć powtórzenie może nie nastąpić w czasie całego życia badacza.

Z perspektywy badań bardzo złożonych F-systemów przydatne byłoby zatem opracowanie narzędzi pozwalających na ocenę chaotycznych własności takich systemów przy uwzględnieniu ograniczeń towarzyszących eksperymentom komputerowym. Czas trwania obliczeń może z jednej strony nie dopuścić do ujawnienia się pewnych cech, takich jak długość okresu trajektorii, z drugiej strony może nie pozwolić na powtórzenie obserwacji dla wielu trajektorii rozpoczynających się w różnych punktach. Ocena chaotycznych własności F-systemów wymaga też wzięcia pod uwagę ilościowej natury owych własności i wprowadzenia pewnej miary chaosu, zachowania F-systemów mogą bowiem zajmować różne miejsca na ciągłej skali pomiędzy porządkiem a chaosem. Wskazane tu zagadnienia stanowić mogą interesujący przedmiot przyszłych prac badawczych.

Bibliografia

Dorfman J.R., *Wprowadzenie do teorii chaosu w nierównowagowej mechanice statystycznej*, PWN, Warszawa 2001.

Morrison F., *Sztuka modelowania układów dynamicznych deterministycznych, chaotycznych, stochastycznych*, WNT, Warszawa 1996.

Ott E., *Chaos w układach dynamicznych*, WNT, Warszawa 1995.

Peitgen H.O., Jürgens H., Saupe D., *Granice chaosu. Fraktale*, PWN, Warszawa 1997.
Schuster H.G., *Chaos deterministyczny*, PWN, Warszawa 1995.
Wołoszyn P., *Analiza chaotycznej dynamiki w systemach multiagentowych i możliwości jej zastosowania w przetwarzaniu danych*, Badania Naukowe, zeszyt 2: 167—173, Wyższa Szkoła Umiejętności w Kielcach, Kielce 2002.
Wołoszyn P., *Modelowanie dynamiki chaotycznych systemów biologicznych z użyciem metod multiagentowych*, Rozprawa doktorska, Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie, Kraków 2004.