Jacek Wołoszyn

Obliczeniowe aspekty modelowania systemów chaotycznych

Wprowadzenie

Badanie dynamiki systemów z chaosem deterministycznym prowadzone jest zwykle przy istotnym wykorzystaniu elektronicznej techniki obliczeniowej i ma najczęściej formę komputerowych eksperymentów symulacyjnych. Właściwie zaprojektowane i utworzone oprogramowanie komputerowe pozwala w wygodny sposób generować wymaganej długości szeregi czasowe, które stanowią wynik obserwacji modelu matematycznego badanego systemu dynamicznego. Komputer wraz ze stosownym oprogramowaniem służyć może również do wykonywania obliczeń w fazie analizy rezultatów rejestrowanych podczas przebiegu eksperymentu symulacyjnego. Zasoby systemu komputerowego i ich wykorzystanie w dużym stopniu wpływają na kształt formułowanych wniosków i hipotez naukowych stanowiących w większości przypadków główny cel prowadzonych eksperymentów. Od jakości wykonywanych obliczeń komputerowych zależą w znacznej mierze kierunki planowanych dalszych badań naukowych, a niejednokrotnie również podejmowane ustalenia aplikacyjne. Duże znaczenie ma także efektywność wykorzystywanych metod obliczeniowych przejawiająca silny wpływ na czas potrzebny do realizacji zaplanowanych eksperymentów symulacyjnych.

Pojęcie chaosu deterministycznego łączy w sobie dwa przeciwstawne niejako terminy: chaos i determinizm. Określenia te intuicyjnie rozumiane jako przeciwstawne [I. Stewart 1996; J. Gleick 1996] łączą się jednak harmonijnie w opisie zachowania się szerokiej klasy systemów dynamicznych. Chaos i determinizm prezentują dwa różne aspekty dynamiki badanego systemu przedmiotowego. Cecha determinizmu wiąże się z możliwością w pełni jednoznacznego wyznaczenia przyszłego stanu systemu na podstawie znajomości jego stanu bieżącego oraz stanów poprzednich leżących na trajektorii ewolucji systemu w przestrzeni jego stanów. Warto wspomnieć, że w nieco innym rozumieniu determinizm może oznaczać wyłącznie możliwość prognozowania przyszłych stanów systemu, co oznacza wyznaczanie prawdopodobieństwa wystąpienia określonych stanów, a nie przewidywanie dokładnego ilościowo przyszłego zachowania się systemu. Takie założenie badawcze jest powszechnie stosowane w analizie dynamiki systemów ekonomicznych i innych systemów dynamicznych należących do klasy tzw. miękkich systemów (np. systemy biologiczne, społeczne).

Generalnie należy stwierdzić, że chaos pojawiający się w systemie dynamicznym związany jest z obserwowanymi w tym systemie przebiegami mającymi zdecydowanie nieregularny charakter. Zmienne opisujące stan systemu chaotycznego mają postać szeregów czasowych o trudnym do przewidywania przebiegu ich wartości. To przewidywanie staje się coraz trudniejsze w miarę wydłużania rozważanego zakresu czasowego szeregu [G. L. Baker, J. P. Gollub 1998; E. Ott 1997; H. G. Schuster 1995]. Opisywana nieprzewidywalność systemów chaotycznych wynika z ich bardzo dużej wrażliwości na warunki początkowe, czego obserwowanym efektem jest zbliżanie się i oddalanie w przestrzeni stanów systemu dwóch trajektorii systemu, mających dowolnie blisko położone punkty startowe. Należy przy tym pamiętać, że zachowanie się systemu chaotycznego pozostaje całkowicie zdeterminowane, co oznacza pełną przewidywalność dynamiki systemu w krótkich odcinkach czasu.

Warunkiem koniecznym wystąpienia zachowania chaotycznego w systemie dynamicznym jest nieliniowość tego systemu. Model matematyczny systemu nieliniowego nie poddaje się łatwo badaniu metodami analitycznymi. Powszechnie stosowanym wyjściem z takiej sytuacji jest linearyzacja modelu. Większość rzeczywistych systemów, które stanowią przedmiot badań, jest w różnym stopniu nieliniowa i ze względu na ograniczone możliwości metod analitycznych ich modele matematyczne, mające zwykle postać układu równań różniczkowych, poddawane są wspomnianej procedurze linearyzacji. Eksperymenty symulacyjne pozwalają na znajdowanie rozwiązania równań różniczkowych modelu matematycznego metodami iteracyjnymi. Wymaga to wcześniejszego przekształcenia modelu do postaci równań różnicowych. Ich rozwiązywanie metodami numerycznymi związane jest z problemem stabilności komputerowych obliczeń. W pracy tej rozważane są pewne zagadnienia dotyczące wspomnianej stabilności obliczeń numerycznych, które od strony aplikacyjnej stanowią istotę przeprowadzanych eksperymentów komputerowych z modelami matematycznymi systemów chaotycznych.

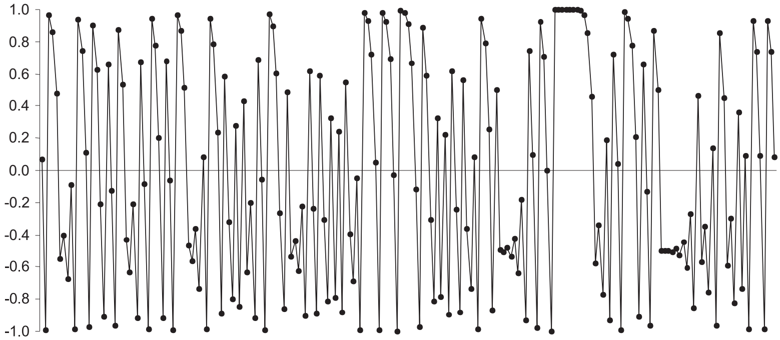
1. Proste odwzorowania generujące chaos

Sprowadzanie układu równań różniczkowych do postaci adekwatnego układu równań różnicowych prowadzi do skonstruowania modelu matematycznego złożonego z pewnych formuł mających charakter iteracyjny. Formuły te z natury swojej generują wartości szeregu czasowego, który reprezentuje wybraną zmienną badanego modelu. Klasycznym już przykładem modelu systemu dynamicznego generującego chaos jest odwzorowanie kwadratowe [I. Stewart 1996], mające postać następującej formuły iteracyjnej:

$$x_{t+1} = 2x_t^2 - 1 \tag{1}$$

Rysunek 1

Wykres zmiennej x o wartościach generowanych przez odwzorowanie kwadratowe (1)

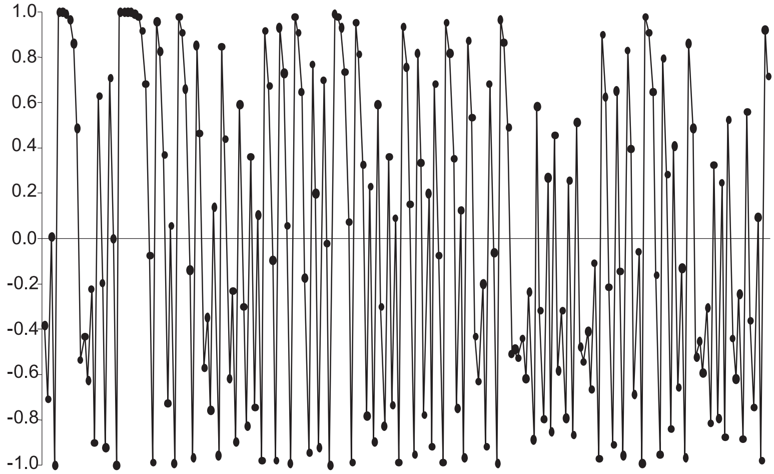


Funkcja kwadratowa występująca w równaniu (1) z natury swojej nieliniowa wprowadza do modelu matematycznego nieliniowości warunkujące wystąpienie zjawisk chaosu. O tym, że generowany równaniem (1) szereg czasowy reprezentuje chaos deterministyczny można się przekonać wybierając w sposób w dużej mierze arbitralny pewną wartość początkową x_0 dla zmiennej x w początkowej chwili czasu $t = 0$, która stanowi początkowy moment komputerowego eksperymentu symulacyjnego z naszym prostym modelem systemu dynamicznego. W dalszej kolejności wielokrotnie stosujemy odwzorowanie (1) do sukcesywnego generowania wartości zmiennej x. Po osiągnięciu założonego wcześniej horyzontu symulowanego czasu uzyskujemy, jako rezultat symulacji, szereg czasowy opisujący zachowanie się systemu w dyskretnych momentach czasu.

Wyniki dokonanej symulacji w postaci wykresu fragmentu szeregu czasowego wygenerowanego przez formułę (1) przedstawione zostały na rysunku 1. Nawet pobieżna analiza przedstawionego wykresu wskazuje na występowanie w otrzymanym szeregu czasowym znacznych nieregularności dotyczących kształtu w przebiegu obserwowanej zmiennej x rozważanego modelu. Wykonany eksperyment symulacyjny możemy wielokrotnie powtarzać wybierając za każdym razem inną wartość początkową x_0. Uzyskiwane kolejno szeregi czasowe mają każdorazowo inny przebieg wartości i wykazują pod względem kształtu odpowiadających im wykresów całkowity brak podobieństwa. Wynika to ze wspomnianej wcześniej dużej wrażliwości systemów chaotycznych reprezentowanych przez swoje modele matematyczne na warunki początkowe. Łatwo jest się o tym przekonać powtarzając procedurę iterowania odwzorowania (1) dla wartości początkowej niewiele różniącej się od poprzednio wybranej wartości. Zwiększając nieznacznie wartość początkową x_0 poprzez dodanie składnika 10^{-15} uzyskujemy szereg czasowy przedstawiony w postaci wykresu na rysunku 2. Porównując otrzymane wykresy stwierdzamy zdecydowanie inny kształt przebiegu szeregu czasowego w obydwu przypadkach.

Rysunek 2

Zmiana kształtu wykresu zmiennej x o wartościach generowanych przez odwzorowanie kwadratowe (1) po nieznacznym powiększeniu wartości początkowej o 10^{-15}



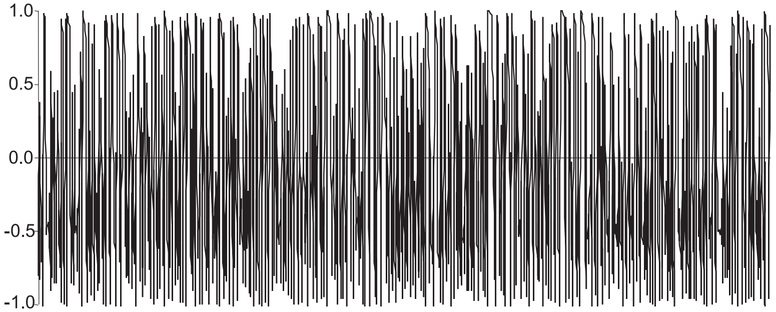
2. Precyzja komputerowo realizowanych obliczeń numerycznych

Obliczenia numeryczne realizowane przy wykorzystaniu systemu komputerowego podlegają pewnym istotnym ograniczeniom dotyczącym dokładności wykonywanych przez komputer operacji arytmetycznych. Przyczyny wspomnianych ograniczeń związane są w głównej mierze ze sprzętem komputerowym oraz wykorzystywanym oprogramowaniem. Jednym z tych czynników jest długość rejestrów arytmetycznych procesora i innych elementów architektury sprzętowej komputera. Drugim czynnikiem wyznaczającym dokładność obliczeń w systemie komputerowym jest specyfika oprogramowania, które wykorzystywane jest do obliczeń. Dokładność realizowanych przez program obliczeń może być w znacznym stopniu zwiększona w stosunku do standardowej dokładności obliczeniowej właściwej dla używanego sprzętu. Można to osiągnąć poprzez programową realizację obliczeń zwielokrotnionej precyzji. Jednak ceną za większą dokładność jest w tym przypadku adekwatne wydłużenie czasu potrzebnego do wykonania obliczeń.

Interesującym (zarówno z teoretycznego, jak i praktycznego punktu widzenia) zagadnieniem jest zbadanie wpływu dokładności wykonywanych w systemie komputerowym obliczeń numerycznych, związanych z generowaniem przez rozpatrywany model systemu dynamicznego szeregów czasowych, na zachowania chaotyczne tego modelu. Przeprowadzenie odpowiedniego eksperymentu symulacyjnego powinno zostać poprzedzone analizą wpływu zaokrągleń dokonywanych w procesie obliczeniowym na końcowe rezultaty symulacji.

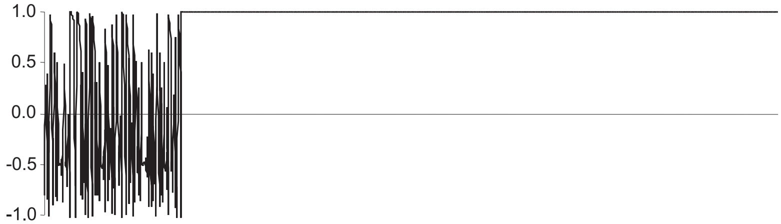
Rysunek 3

Wpływ dokładności obliczeń, odwzorowanie $x_t+1 = 2x_t^2 - 1$, $x_0 = 0{,}3478500$, dokładność obliczeń 7 cyfr dziesiętnych



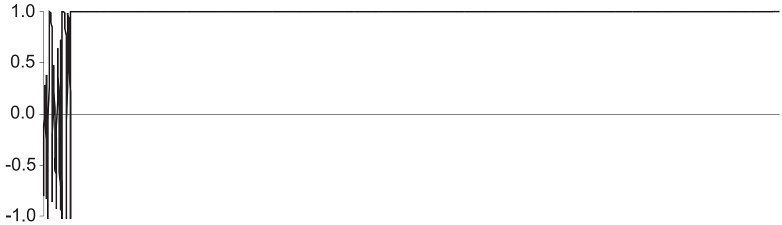
Rysunek 4

Wpływ dokładności obliczeń, odwzorowanie $x_{t+1} = 2x_t^2 - 1$, $x_0 = 0{,}3478500$, dokładność obliczeń 6 cyfr dziesiętnych



Rysunek 5

Wpływ dokładności obliczeń, odwzorowanie $x_{t+1} = 2x_t^2 - 1$, $x_0 = 0{,}3478500$, dokładność obliczeń 5 cyfr dziesiętnych

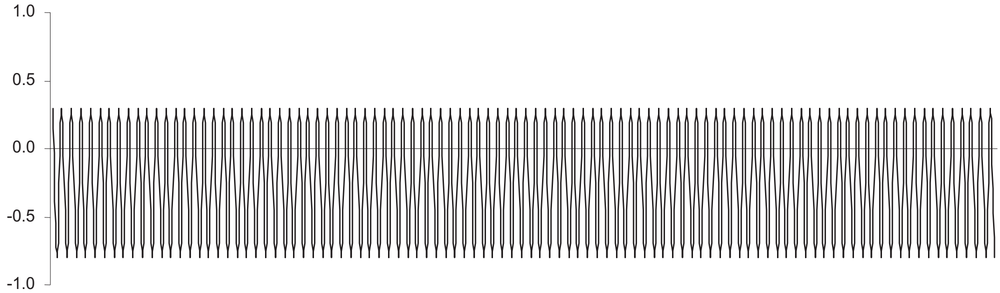


Przeprowadzając eksperyment symulacyjny z modelem (1) zmiennej występującej w tym modelu nadajemy pewną wartość początkową, którą standardowo reprezentuje n-cyfrowy zapis dziesiętny. Każda operacja mnożenia zwiększa o n liczbę cyfr rezultatu tej operacji. Wykonując kolejne iteracje formuły (1) obserwujemy szybkie zwiększanie się długości części ułamkowej wartości zmiennej rozpatrywanego modelu. Powszechnie stosowanym w systemach komputerowych ograniczeniem precyzji obliczeń jest zaokrąglanie rezultatu wykonanej operacji arytmetycznej zgodnie z przyjętą dokładnością obliczeń.

Powtarzając kilkakrotnie obliczenia symulacyjne zaobserwować możemy wpływ dokładności wykonywanych obliczeń na rezultaty eksperymentów w postaci generowanych przez model (1) szeregów czasowych. Przed rozpoczęciem eksperymentu wybieramy wartość początkową x_0 = 0,3478500 i ustalamy jednocześnie dokładność prowadzonych obliczeń na 7 cyfr części ułamkowej wartości zmiennej x_t. Wyniki obliczeń przedstawione zostały na rysunku 3. Na podstawie zamieszczonego wykresu stwierdzić możemy występowanie zachowania o charakterze chaotycznym. Powtarzając wykonane obliczenia przy zachowanych poprzednich warunkach oraz zmniejszonej jedynie dokładności operacji arytmetycznych do 6 cyfr, a następnie do 5 cyfr, obserwujemy (rysunki 4 i 5) skrócenie odcinków o charakterze chaotycznym w przebiegu zmiennej x_t. Dalsze zachowanie obserwowanej zmiennej cechuje stabilizacja mająca formę szeregu o stałych wartościach równych 1.

Rysunek 6

Wpływ dokładności obliczeń, odwzorowanie $x_{t+1} = 2x_t^2 — 1$, $x_0 = 0,3$, dokładność obliczeń 1 cyfra dziesiętna, długość cyklu 2



W miarę zmniejszania dokładności obliczeń wykonywanych w trakcie eksperymentu komputerowego obserwujemy stopniowe przechodzenie badanego modelu matematycznego od zachowania chaotycznego do zachowania o większym stopniu regularności. Własność tę widać wyraźnie na rysunku 6, które prezentuje szereg czasowy generowany przez odwzorowanie (1) dla wartości początkowej x_0=0,3 przy ustalonej jednocyfrowej dokładności wykonywanych komputerowo obliczeń numerycznych.

Analizując proces obliczeniowy, który prowadzony jest z kontrolowaną redukcją precyzji wykonywanych operacji arytmetycznych (co można w prosty sposób uzyskać programowo za pomocą odpowiednich procedur komputerowych zaokrąglających rezultaty operacji numerycznych), łatwo zauważamy mechanizm pojawiania się regularności w szeregu czasowym generowanym przez rozważany model systemu chaotycznego. Zmienna x_t generowana przez odwzorowanie (1) przy założeniu jednocyfrowej dokładności może przyjmować jedynie wartości ze skończonego zbioru, który w punkcie startowym ma postać {–1,0; –0,9; –0,8; –0,7; –0,5; –0,3; 0,0; 0,3; 0,6; 1,0}. W kolejnych iteracjach zbiór możliwych wartości zmiennej x_t zostaje zredukowany do czteroelementowego zbioru {–0,8; –0,5; 0,3; 1,0}. Zbiory wartości tej zmiennej w kolejnych krokach obliczeń przedstawione zostały w poszczególnych kolumnach tabeli 1. Końcowy zbiór {–0,8; –0,5; 0,3; 1,0} uzyskany w piątym kroku prowadzi do generowania dwóch stałych szeregów czasowych o wartościach 1,0 oraz –0,5 lub szeregu stanowiącego cykl długości 2 o wartościach –0,8 i 0,3.

Tabela 1

Zbiory możliwych wartości szeregu czasowego generowanych w kolejnych krokach iteracji przy dokładności jednocyfrowej

Start	Krok 1	Krok 2	Krok 3	Krok 4	Krok 5
–1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0
–0,9	0,6	–0,3	–0,8	0,3	–0,8
–0,8	0,3	–0,8	0,3	–0,8	0,3
–0,7	0,0	–1,0	1,0		
–0,6	–0,3	–0,8			
–0,5	–0,5	–0,5	–0.5	–0,5	–0,5
–0,4	–0,7	0,0	–1,0	1,0	
–0,3	–0,8	0,3	–0,8		
–0,2	–0,9	0,6	–0,3	–0,8	
–0,1	–1,0	1,0			
0,0	–1,0				
0,1	–1,0				
0,2	–0,9				
0,3	–0,8				
0,4	–0,7				
0,5	–0,5				
0,6	–0,3				
0,7	0,0				
0,8	0,3				
0,9	0,6				
1,0	1,0				

Analogiczna sytuacja występuje w przypadku prowadzenia obliczeń z dokładnością do dwóch cyfr dziesiętnych. Zmienna x_t generowana przez to samo odwzorowanie (1) może przyjmować wartości ze skończonego zbioru, który w momencie startowym liczy 201 elementów {–1,00; –0,99; 0,98; –0,97;...... 0,97; 0,98; 0,99; 1,00}. Kolejne kroki iteracji redukują zbiór możliwych wartości zmiennej x_t. W kroku 12 obejmuje on jedynie 24 elementy {–0,99; –0,97; –0,90; –0,89; –0,81; –0,78; –0,68; –0,66; –0,50; –0,40; –0,33; –0,23; –0,13; –0,08; 0,22; 0,31; 0,41; 0,55; 0,58; 0,62; 0,84; 0,88; 0,96; 1.00}. Od kroku 13 każdy generowany szereg czasowy staje się cykliczny. Najdłuższy cykl ma długość 12 kroków. Są jednak cykle krótsze. Dokładniejsza analiza wskazuje na występowanie dodatkowo cyklu długości 8 oraz 2 kroków, a także dwóch różnych szeregów o stałych wartościach, co odpowiada cyklom o długości 1. Omówione własności przedstawia tabela 2.

Tabela 2

Ciągi wartości stanowiące cykle przy dokładności dwucyfrowej

Długość cyklu 1	Długość cyklu 1	Długość cyklu 2	Długość cyklu 8	Długość cyklu 12
–0,50	1,00	–0,81	–0,90	–0,99
		0,31	0,62	0,96
			–0,23	0,84
			–0,89	0,41
			0,58	–0,66
			–0,33	–0,13
			–0,78	–0,97
			0,22	0,88
				0,55
				–0,40
				–0,68
				–0,08

Zauważmy, że w obydwu analizowanych przypadkach (przy generowaniu szeregów czasowych z jednocyfrową i dwucyfrową dokładnością) występują stałe szeregi o wartościach –0,5 oraz 1,0. Dodatkowe podobieństwo dotyczy szeregów z cyklem długości 2 o wartościach odpowiednio –0,8 i 0,3 dla przypadku dokładności jednocyfrowej oraz –0,81 i 0,31 dla przypadku dokładności dwucyfrowej.

W podobny sposób można poddać analizie proces generowania szeregów czasowych za pomocą odwzorowania (1), zakładając każdorazowo inną dokładność wykonywanych obliczeń. Łatwo przewidzieć, że otrzymamy podobne rezultaty wskazujące na występowanie cykliczności w uzyskiwanych szeregach czasowych.

Przy dokładności prowadzonych obliczeń wynoszącej n cyfr dziesiętnych, maksymalna długość cyklu $d_{max}(n)$ ograniczona jest od góry zależnością:

$$d_{\max}(n) \leq 2 \cdot 10^n + 1 \tag{2}$$

Interesującym zagadnieniem byłoby bardziej szczegółowe zbadanie, jakie cykle pojawiają się w szeregach czasowych generowanych przez odwzorowanie (1) przy zmieniającej się dokładności obliczeń.

Podsumowując nasze rozważania dotyczące rozpatrywanych modeli systemów chaotycznych sformułować można ogólny wniosek o braku ostrej i wyraźnej granicy pomiędzy zachowaniem chaotycznym i zachowaniem regularnym. Trudno bowiem za chaotyczne uznać zachowanie systemu opisywane szeregiem czasowym przedstawionym na rysunku 6, ilustrującym wyniki jednocyfrowej dokładności obliczeń. W miarę zwiększania dokładności obliczeń odcinek szeregu czasowego z zachowaniem chaotycznym wydłuża się. Wydłużają się również cykle obserwowane w szeregu czasowym.

Zakończenie

Standardową dokładnością obliczeniową większości programów komputerowych jest 15 cyfr dziesiętnych. Uwzględniając zależność (2) możemy stwierdzić, że każdy komputerowo generowany szereg czasowy (przez deterministyczne odwzorowanie) jest szeregiem cyklicznym, przy czym oczywiście długość występującego cyklu może być w ogólnym przypadku bardzo duża. Cykl o długości 10^{13} lub większej może być traktowany jako praktycznie nieskończony w przypadku analizy komputerowej. W większości komputerów nie jest możliwe przechowanie wspomnianej ilości liczb w pamięci komputera. Nie jest również ze względów czasowych możliwe realne wykonanie w trybie sekwencyjnym obliczeń niezbędnych do uzyskania zbioru 10^{13} wartości liczbowych. Warunkiem obserwowania i badania przebiegów chaotycznych w modelu systemu dynamicznego jest możliwość wykonywania obliczeń z wystarczająco dużą dokładnością. Warunki takie może zapewnić nowa i odpowiednio wykorzystana technika komputerowa.

Bibliografia

Baker G. L., Gollub J. P., *Wstęp do dynamiki układów chaotycznych*, PWN, Warszawa 1998.

Gleick J., *Chaos*, Zysk i S-ka, Poznań 1996.

Ott E., *Chaos w układach dynamicznych*, WNT, Warszawa 1997.

Schuster H. G., *Chaos deterministyczny. Wprowadzenie*, PWN, Warszawa 1995.

Stewart I., *Czy Bóg gra w kości? Nowa matematyka chaosu*, PWN, Warszawa 1996.