

JACEK WOŁOSZYN

Symulacyjne badanie stabilności numerycznej odcinkami liniowych modeli systemów chaotycznych

Wstęp

W otaczającej nas rzeczywistości wiele systemów cechuje dynamika, w której obserwować można zachowania określane mianem chaotycznych. Zjawiska te wynikają ze specyficznego charakteru dynamiki wspomnianych systemów. Oznaczają one w głównej mierze występowanie w analizowanym systemie (lub modelu matematycznym tego systemu) przebiegów mających zdecydowanie nieregularny kształt [E. Ott 1997; H. G. Schuster 1995]. Przebiegi te są bardzo trudne do przewidzenia w długim okresie, przy czym zwiększenie długości horyzontu czasowego prognozy zachowania się systemu zmniejsza radykalnie trafność tej prognozy. Termin *chaos deterministyczny* łączy w sobie pełny determinizm dotyczący dynamiki systemu, z którego wynika całkowita jednoznaczność zachowania się systemu, z nieregularnymi przebiegami niektórych zmiennych stanu tego systemu, co daje pozory zachowania losowego, z natury trudnego do przewidywania.

Jednym z koniecznych warunków wystąpienia zachowania chaotycznego w systemie deterministycznym jest nieliniowość relacji występujących w tym systemie. W systemach liniowych (gdzie reakcja na bodziec jest proporcjonalna do tego bodźca) nie obserwujemy zachowania chaotycznego. Zupełnie inny charakter mają systemy nieliniowe. Ich dynamika pozwala obserwować nagłe i nieoczekiwane zmiany stanu, które trudno jest badać w sposób analityczny. Powszechnie dokonywana linearyzacja w celu uproszczenia modelu matematycznego badanego systemu często eliminuje z konstruowanego modelu najbardziej interesujące relacje stanowiące źródło jego chaotycznego zachowania. Postępowanie takie może w sposób istotny zniekształcać modelowaną dynamikę systemu. Główne korzyści linearyzacji wiążą się z radykalnym uproszczeniem obliczeń oraz możliwością formułowania bezpośrednich prostych wniosków dotyczących zachowania się systemu.

1. Generowanie chaosu przez odwzorowanie odcinkami liniowe

Jednym z najprostszych odwzorowań nieliniowych, które mogą generować przebiegi chaotyczne [H. G. Schuster 1995], jest odwzorowanie odcinkami liniowe:

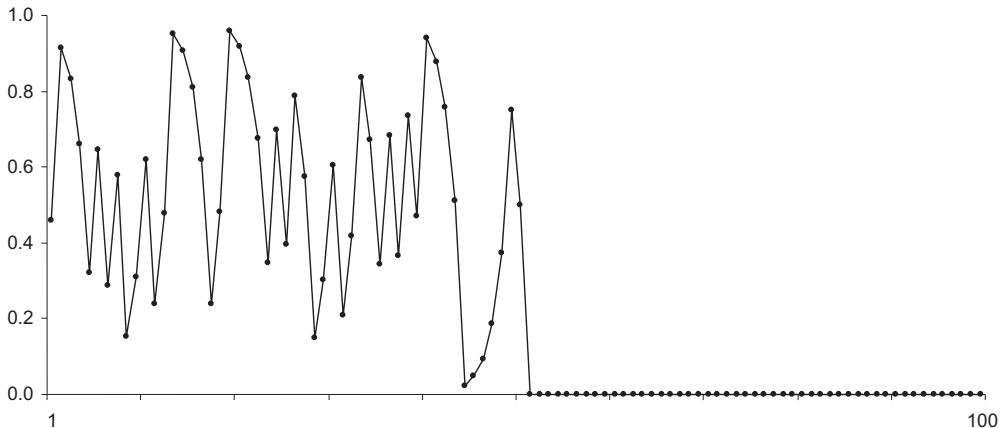
$$x_{t+1} = 2x_t \bmod 1 \quad (1)$$

gdzie zapis $x \bmod 1$ oznacza część ułamkową liczby x dla $x \geq 0$.

Formuła (1) stanowić może prosty model generujący szeregi czasowe wykazujące zachowanie chaotyczne. Model ten poddamy eksperymentom symulacyjnym, w których analizować będziemy generowane szeregi czasowe. Bardzo szybko zauważamy, że rezultaty iteracyjnego generowania szeregów czasowych przez nasz prosty model w sposób znaczący zależą od wykorzystywanych procedur numerycznych. W naszym przypadku do obliczeń wykorzystane zostało proste narzędzie w postaci programu MS Excel. W programie tym użytkownik może w dużym stopniu decydować o stosowanej precyzji obliczeń. Przeprowadzając obliczenia bez ograniczania ich dokładności otrzymujemy rezultaty zaprezentowane w postaci wykresu czasowego pokazanego na rysunku 1.

Rysunek 1

Wykres zmiennej x_t generowanej przez odwzorowanie $x_{t+1} = 2x_t \bmod 1$, wartość początkowa $x_0 = 0,457635801848427$, iteracje 1—100



Iteracyjny proces wyznaczania kolejnych wartości szeregu czasowego rozpoczynamy od wyboru (w sposób przypadkowy lub arbitralny) pewnej wartości początkowej $x_0 = 0,457635801848427$. Uzyskany szereg czasowy wykazuje początkowo zachowanie o charakterze chaotycznym, ale po 50 krokach iteracji jego wartości ustalają się na poziomie zerowym. Podobne rezultaty otrzymujemy wybierając inne punkty startowe. Zastanawiać może nas (rysunek 1) regularne wygasanie chaotycznego przebiegu zmiennej x_t w pobliżu 50 kroku iteracji od-

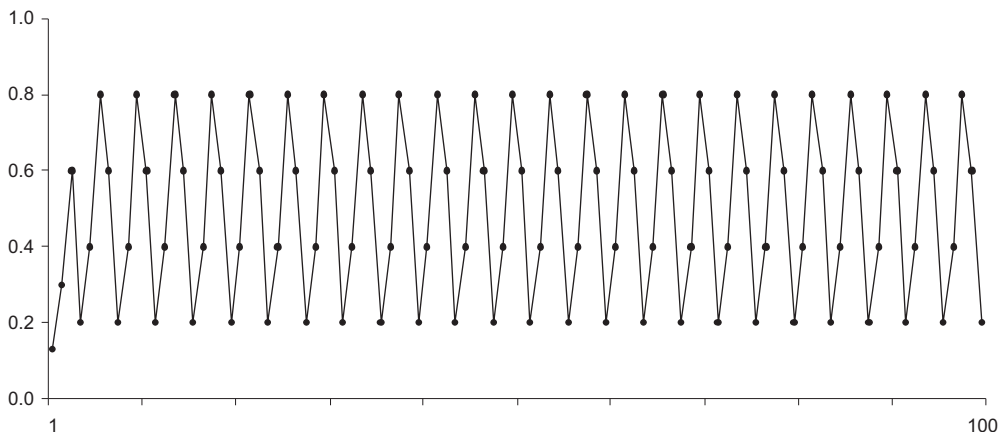
kich przebiegów o charakterze chaotycznym. Wynika to ze specyficznych własności operacji numerycznych wykonywanych przez urządzenia sprzętowe systemu komputerowego.

2. Wpływ dokładności obliczeń numerycznych na zachowanie chaotyczne modelu

Interesującym zagadnieniem jest zbadanie własności obliczeń realizowanych komputerowo, które są wykonywane w trakcie eksperymentu symulacyjnego ze stałą precyzją. Przeprowadzimy następujące eksperymenty obliczeniowe. Wybieramy wartość początkową $x_0 = 0,131313$ jako wartość startową w procesie generowania szeregu czasowego. Eksperyment ten powtarzamy dla różnych poziomów dokładności wykonywanych obliczeń. Założoną dokładność obliczeń w najprostszym sposobie wyrazić można liczbą cyfr znaczących rezultatów uzyskiwanych w poszczególnych krokach iterowania formuły (1). W praktyce oznacza to, że wynik iteracji zostaje zaokrąglony w do n cyfr dziesiętnych.

Rysunek 3

Wykres zmiennej x_t generowanej przez odwzorowanie $x_{t+1} = 2x_t \bmod 1$, wartość początkowa $x_0 = 0,131313$, dokładność obliczeń: zaokrąglenie do jednej cyfry dziesiętnej, iteracje 1—100

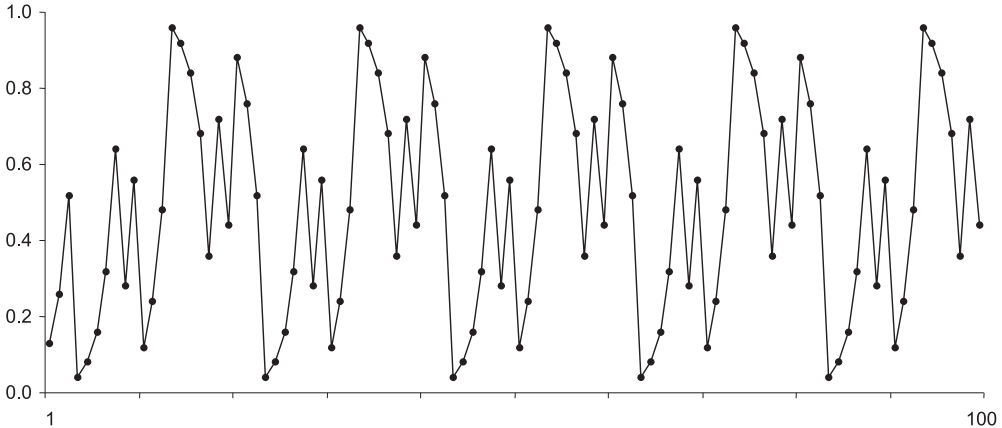


Wykresy zamieszczone na rysunkach 3, 4 i 5 obrazują początkowe fragmenty szeregów czasowych otrzymanych jako rezultaty przeprowadzonych eksperymentów symulacyjnych przy zastosowaniu zaokrąglania wyników obliczeń odpowiednio do jednej cyfry, dwóch cyfr oraz trzech cyfr dziesiętnych.

W przypadku zaokrąglania wyników obliczeń do jednej cyfry dziesiętnej obserwujemy występowanie w wygenerowanym szeregu czasowym cyklu o długości 4. Przy obliczeniach z dokładnością dwóch cyfr dziesiętnych pojawia się przebieg cykliczny o okresie 20. Dalsze zwiększanie dokładności obliczeń skutkuje

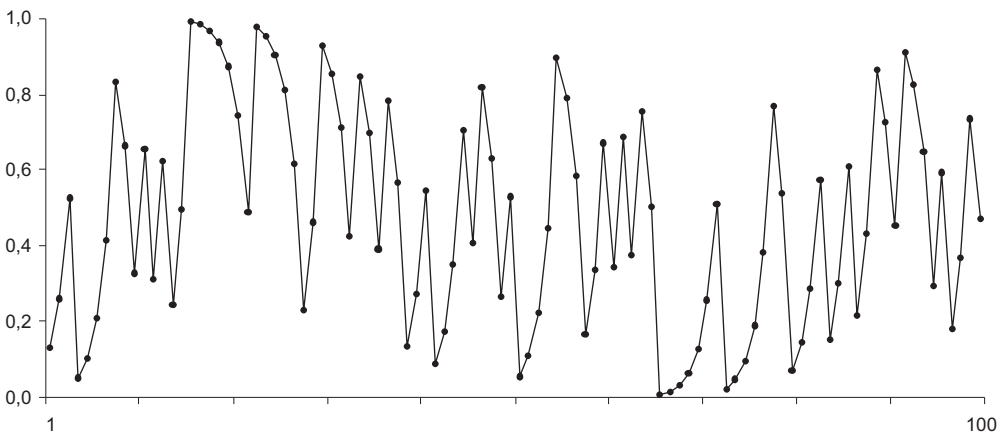
Rysunek 4

Wykres zmiennej x_t generowanej przez odwzorowanie $x_{t+1} = 2x_t \bmod 1$, wartość początkowa $x_0 = 0,131313$, dokładność obliczeń: zaokrąglenie do dwóch cyfr dziesiętnych, iteracje 1—100



Rysunek 5

Wykres zmiennej x_t generowanej przez odwzorowanie $x_{t+1} = 2x_t \bmod 1$, wartość początkowa $x_0 = 0,131313$, dokładność obliczeń: zaokrąglenie do trzech cyfr dziesiętnych, iteracje 1—100



zachowaniem o charakterze chaotycznym w obrębie pewnego początkowego odcinka szeregu czasowego. Odcinki te jednak powtarzają się w sposób regularny, tworząc przebieg cykliczny. Wykonując dalsze eksperymenty obliczeniowe możemy zbadać nieco dokładniej wpływ dokładności obliczeń na cykliczność generowanych szeregów czasowych. Uzyskane w ten sposób rezultaty złożyły się na wyniki zaprezentowane w tabeli 1.

Tabela 1

Wpływ dokładności obliczeń na długość cyklu generowanego szeregu czasowego dla wartości początkowej $x_0 = 0,131313$

Długość cyklu w zależności od dokładności obliczeń						
1 cyfra	2 cyfry	3 cyfry	4 cyfry	5 cyfr	6 cyfr	7 cyfr
4	20	100	500	2500	12500	12500

Przeglądając wyniki wykonanych obliczeń symulacyjnych zauważamy pewną regularność w zjawisku zwiększania się długości cyklu wraz ze zwiększaniem dokładności obliczeń. Własność ta prowadzi do sformułowania następującej zależności:

$$p = 4 \cdot 5^{n-1} \quad (2)$$

gdzie p jest obserwowaną długością cyklu w generowanym szeregu czasowym, a n jest dokładnością wyrażoną liczbą cyfr dziesiętnych zaokrąglenia wyników obliczeń.

Tabela 2

Długości cykli dla różnej dokładności obliczeń w zależności od wartości początkowej x_0

Wartość Początkowa x_0	Długość cyklu w zależności od dokładności obliczeń						
	1 cyfra	2 cyfry	3 cyfry	4 cyfry	5 cyfr	6 cyfr	7 cyfr
0,1313130	4	20	100	500	2500	12500	12500
0,1313131	4	20	100	500	2500	12500	62500
0,1313132	4	20	100	500	2500	12500	62500
0,1313133	4	20	100	500	2500	12500	62500
0,1313134	4	20	100	500	2500	12500	62500
0,1313135	4	20	100	500	2500	12500	12500
0,1313136	4	20	100	500	2500	12500	62500
0,1313137	4	20	100	500	2500	12500	62500
0,1313138	4	20	100	500	2500	12500	62500
0,1313139	4	20	100	500	2500	12500	62500

Zależność (2) nie jest jednak spełniona w przypadku zastosowania obliczeń z dokładnością siedmiu cyfr dziesiętnych. W celu uzyskania pełniejszego obrazu zależności w procesie generowania szeregów czasowych przeprowadzone zostały dodatkowe eksperymenty symulacyjne. Wykonano obliczenia dla różnych wartości początkowych x_0 . Wyniki uzyskane w trakcie eksperymentów zawarte zostały w tabeli 2.

Otrzymane rezultaty pokazują, że zależność (2) jest spełniona dla wszystkich wartości początkowych opisanych zależnością $x_0 = 0,131313 + 10^{-7} \cdot k$, dla $k \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$, z wyjątkiem wartości 0,1313130 oraz 0,1313135. Inne odstępstwa od ogólnej zależności (2) obserwujemy dla wartości początkowych przedstawionych w tabeli 3. Uogólniając wyniki dotychczasowych eksperymentów symulacyjnych możemy sformułować hipotezę stwierdzającą, że zależność (2) określa maksymalną długość cyklu dla ustalonej dokładności obliczeń.

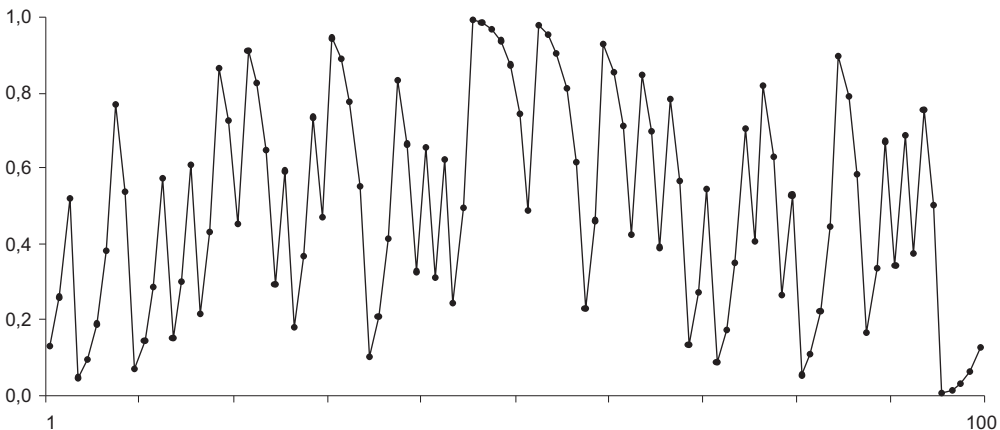
Tabela 3

Długości cykli dla różnej dokładności obliczeń w zależności od wartości początkowej x_0

Wartość początkowa x_0	Długość cyklu w zależności od dokładności obliczeń						
	1 cyfra	2 cyfry	3 cyfry	4 cyfry	5 cyfr	6 cyfr	7 cyfr
0,1251250	4	1	1	500	100	100	100
0,1251251	4	1	1	500	100	100	62500
0,1251252	4	1	1	500	100	100	62500
0,1251253	4	1	1	500	100	12500	62500
0,1251254	4	1	1	500	100	12500	62500
0,1251255	4	1	1	500	100	12500	12500
0,1251256	4	1	1	500	100	12500	62500
0,1251257	4	1	1	500	100	12500	62500
0,1251258	4	1	1	500	100	12500	62500
0,1251259	4	1	1	500	100	12500	62500

Rysunek 6

Wykres zmiennej x_i generowanej przez odwzorowanie $x_{t+1} = 2x_t \bmod 1$, wartość początkowa $x_0 = 0,131313$, dokładność obliczeń: obcięcie wyniku do trzech cyfr dziesiętnych, iteracje 1–100



Na zakończenie naszych rozważań zaprezentujemy rezultaty eksperymentów symulacyjnych, w których przeprowadzone zostały obliczenia z ograniczeniem precyzji operacji arytmetycznych poprzez obcinanie, a nie zaokrąglanie, wartości rezultatów do założonej liczby n cyfr dziesiętnych. Powtórzone zostały jeszcze raz obliczenia dla prezentowanego przykładu z wartością początkową $x_0 = 0,131313$. W przypadku obliczeń realizowanych z obcinaniem rezultatów do trzech cyfr dziesiętnych otrzymujemy na podstawie odwzorowania (1) szereg czasowy przedstawiony w postaci wykresu na rysunku 6. Wyniki zaprezentowane w tabeli 4 wskazują na pojawienie dla przypadku czterocyfrowej dokładności prowadzonych obliczeń nowego cyklu, który nie był obserwowany we wcześniej wykonywanych eksperymentach symulacyjnych. Przy zwiększaniu dokładności obliczeń do pięciu, sześciu i siedmiu cyfr dziesiętnych nie obserwujemy występowania przebiegów cyklicznych.

Tabela 4

Wpływ dokładności obliczeń na długość cyklu generowanego szeregu czasowego dla wartości początkowej $x_0 = 0,131313$. Stosowanie obcinania

Długość cyklu w zależności od dokładności obliczeń						
1 cyfra	2 cyfry	3 cyfry	4 cyfry	5 cyfr	6 cyfr	7 cyfr
4	20	100	382	brak	brak	brak

3. Przypadek odwzorowania trójkątnego

Innym odwzorowaniem, podobnym do analizowanego dotychczas odwzorowania odcinkami liniowego jest odwzorowanie trójkątne [E. Ott 1997; H. Zawadzki 1996] opisywane zależnością:

$$x_{t+1} = 1 - 2|x_t - 0,5| \quad (3)$$

dla wartości $x_t \in [0; 1]$.

Zależność (3) możemy również w postaci:

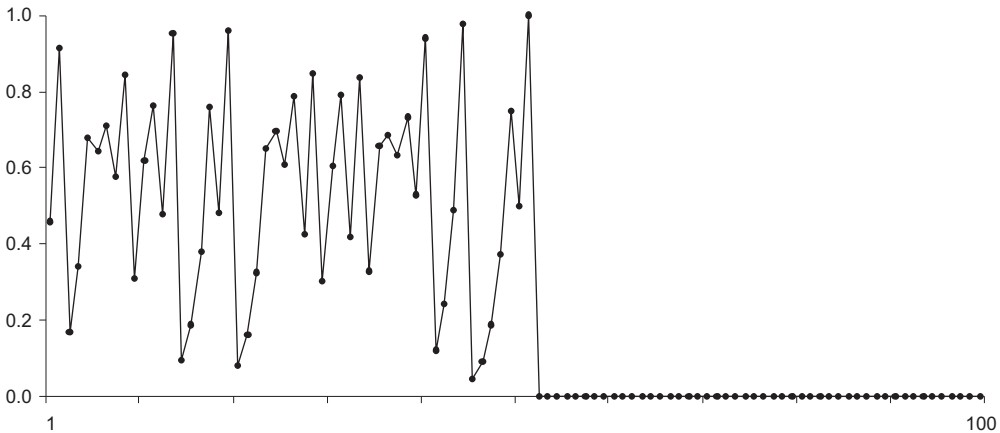
$$x_{t+1} = \begin{cases} 2x_t & \text{dla } 0 \leq x < 0,5 \\ 2 - 2x_t & \text{dla } 0,5 < x \leq 1 \end{cases} \quad (4)$$

oraz przedstawić graficznie w postaci wykresu o kształcie trójkątnym, który nada je jednocześnie nazwę odwzorowaniu.

Postępujemy podobnie jak poprzednio. Na podstawie odwzorowania (3) generowany jest szereg czasowy, a obliczenia wykonujemy bez ograniczania ich dokład-

Rysunek 7

Wykres zmiennej x_t generowanej przez odwzorowanie $x_{t+1} = 1 - 2|x_t - 0,5|$, wartość początkowa $x_0 = 0,457635801848427$, iteracje 1–100



ności. Otrzymane rezultaty dla wartości początkowej $x_0 = 0,457635801848427$ przedstawione zostały w postaci wykresu szeregu czasowego na rysunku 7. Stwierdzamy, że w przeprowadzonych obliczeniach odwzorowanie trójkątne zachowuje się podobnie do odwzorowania odcinkami liniowego.

Wykonywanie obliczeń z ustaloną dokładnością (podobnie jak w poprzednio rozważanych przypadkach) prowadzi do uzyskania szeregów czasowych, w których obserwowane są cykle mające długości zależne od poziomu precyzji obliczeń wyrażającej się liczbą cyfr dziesiętnych określających dokładność wyniku operacji arytmetycznych. W tabeli 5 przedstawione zostały długości cykli pojawiających się w szeregach czasowych uzyskanych przy ustalonych arbitralnie pewnych wartościach początkowych oraz określonej liczbie cyfr zaokrąglenia wyników obliczeń.

Tabela 5

Długości cykli dla różnej dokładności obliczeń w zależności od wartości początkowej x_0

Wartość początkowa x_0	Długość cyklu w zależności od dokładności obliczeń						
	1 cyfra	2 cyfry	3 cyfry	4 cyfry	5 cyfr	6 cyfr	7 cyfr
0,31313131	2	10	50	250	1250	6250	31250
0,77777777	2	10	50	250	1250	6250	6250
0,77777770	2	10	50	250	1250	1250	31250
0,77777700	2	10	50	250	250	6250	6250
0,77777000	2	10	50	50	1250	1250	1250
0,77770000	2	10	10	250	250	250	250
0,77700000	2	2	50	50	50	50	50

Na podstawie przeprowadzonych eksperymentów symulacyjnych sformułować można wniosek, że maksymalna długość cyklu p w odwzorowaniu trójkątnym określona jest zależnością:

$$p = 2 \cdot 5^{n-1} \quad (5)$$

gdzie n jest precyzją wykonywanych obliczeń równoważną liczbie cyfr dziesiętnych zaokrąglenia wyników.

Podsumowanie

W niniejszej pracy dominowało eksperymentalne podejście badawcze, obejmujące metody, mające postać symulacji komputerowych dotyczących zachowania się matematycznych modeli systemów dynamicznych. Główne narzędzie prowadzonych badań stanowiła aplikacja z grupy elektronicznych arkuszy obliczeniowych. Prezentowane rezultaty przeprowadzonych badań wykazują, że techniczny aspekt wykonywania obliczeń związanych z modelami systemów, w których jest obserwowany chaos, może mieć istotny wpływ na końcowe wyniki eksperymentów symulacyjnych. W badaniach związanych z komputerową analizą systemów chaotycznych istotną rolę odgrywać może właściwy wybór sprzętu komputerowego oraz oprogramowania zapewniających odpowiednią dokładność i stabilność numeryczną prowadzonych obliczeń.

Bibliografia

- Ott E., *Chaos w układach dynamicznych*, WNT, Warszawa 1997.
Schuster H. G., *Chaos deterministyczny. Wprowadzenie*, PWN, Warszawa 1995.
Zawadzki H., *Chaotyczne systemy dynamiczne*, Akademia Ekonomiczna im. Karola Adamieckiego, Katowice 1996.