

# Wykorzystanie funkcji wykładniczej w modelowaniu dynamiki pola pod wykresem funkcji przynależności w rozmytych szeregach czasowych

## 1. Wstęp

Podstawowym utrudnieniem związanym z analizą danych rozmytych jest ich wielowymiarowość. Cecha ta rzutuje zresztą na praktyczne możliwości wykorzystania badawczego metod teorii zbiorów rozmytych w ogóle. Jednym z podejść służących pokonaniu tych trudności jest poznanie własności różnych skalarnych wskaźników konstruowanych dla liczb rozmytych. I właśnie celem tego artykułu jest przedstawienie wyników badań nad dynamiką pola pod wykresem funkcji przynależności w rozmytym szeregu czasowym wygenerowanym za pomocą liniowego równania różnicowego. Okazuje się, że odwzorowaniem matematycznym, które można wykorzystać do jej aproksymacji jest złożenie funkcji wykładniczej z liniową. Do analizy występujących w tym kontekście przypadków wykorzystano eksperymenty symulacyjne. Potwierdzenie poznanych w ten sposób prawidłowości na drodze analitycznej zdaje się być bardzo skomplikowane i wymaga ewentualnych dalszych badań. Zastosowana procedura wykorzystująca symulację komputerową jest jednak na tyle efektywna, że stanowi wygodną alternatywę dla innych metod postępowania. Jej ograniczeniem jest konieczność każdorazowej weryfikacji postawionych tez w odniesieniu do konkretnego badanego przypadku. Dlatego jej prezentacja ściśle wiąże się z podstawowym tematem opracowania. Opis zastosowanej metody, jak też wynikających z tego wniosków, został zawarty w trzeciej części artykułu. Poprzedza ją wprowadzenie do założeń eksperymentów symulacyjnych i analizy otrzymanych za ich pomocą danych rozmytych. Opracowanie podsumowują wnioski.

## 2. Uwarunkowania eksperymentów symulacyjnych i analizy danych rozmytych

Analiza zmienności pola pod wykresem funkcji przynależności dla elementów rozmytych szeregów czasowych została zawężona w opracowaniu do przypadków

ciągów takich wartości wygenerowanych za pomocą modelu zgodnego z ogólnym wzorem.

$$x_{t+1} = ax_t + b \quad (2.1)$$

W powyższym równaniu różnicowym przyjęto, że zarówno zmienne, jak i parametry zostały zastąpione przez rzeczywiste wartości rozmyte zdefiniowane zgodnie z następującym określeniem.

**Definicja 2.1.** [L. A. Zadeh 1975] *Rozmyta liczba rzeczywista jest zbiorem rozmytym w przestrzeni  $\mathbf{R}$  mający ciągłą funkcję przynależności oraz spełniający warunek wypukłości:*

$$\mu_\alpha(k) \geq \mu_\alpha(x) \wedge \mu_\alpha(z) \quad \forall x, y, z \in \mathbf{R}, \quad y \in [x; z] \quad (2.2)$$

*Klasę rozmytych liczb rzeczywistych oznacza się z kolei często jako  $N(\mathbf{R})$ .*

Przyjęte założenie miało przede wszystkim charakter uproszczenia w kontekście problemów numerycznych związanych z wykonywaniem działań arytmetyki rozmytej. W tym kontekście znana z analizy skalarnej postać funkcji liniowej jest dobrą ilustracją dla przedstawionego w artykule podejścia badawczego, które znajduje identyczne zastosowanie w odniesieniu także do innych postaci równań różnicowych. Generuje przy tym również podobne rezultaty w sensie wniosków wynikających z przeprowadzonych eksperymentów symulacyjnych.

Ponadto w odniesieniu do zmiennej  $x_t$ , jak też parametrów  $a$  i  $b$  zastosowano postać trójkątnych liczb rozmytych [A. Kaufmann, M. M. Gupta 1985] oraz ograniczenie przestrzeni zdefiniowania ich funkcji przynależności do dodatnich liczb rzeczywistych. Nawiązując do definicji 2.1 założenie to przyjmuje poniższą postać

$$x_t, a, b \in N(\mathbf{R}_+) \quad (2.3)$$

Oba wskazane ograniczenia analizy miały przede wszystkim na celu umożliwienie uzyskania relatywnie dużej liczby przebiegów w kolejnych eksperymentach symulacyjnych. Uwzględniono w ten sposób ich uwarunkowania numeryczne przedstawione w pracach [J. Wołoszyn, W. Urban 2001] i [W. Urban 2001]. Wskazują one na istotne wymagania stawiane przed możliwościami obliczeniowymi komputerów wykorzystywanych do przetwarzania danych rozmytych oraz konieczność zastosowania technik aproksymacyjnych w odniesieniu do postaci ich funkcji przynależności.

Dodatkowo przyjęcie założenia o postaci trójkątnej funkcji przynależności składowych modelu (2.1) wiąże się z możliwością posługiwania się wierzchołkowym zapisem rzeczywistej liczby rozmytej zaproponowanym w artykule [W. Urban 1999]. Polega on na wykorzystaniu zaadaptowanych ogólnych zasad zapisu dla zbiorów rozmytych określonych przez L. A. Zadeha. Tak więc zbiór rozmyty  $A$  w przestrzeni  $X$  można przedstawić w poniższy sposób

$$A = \int_x \mu_A(x) / x \tag{2.4}$$

W tej formie notacji symbol  $\mu_A(x)/x$  oznacza rozmyty singleton, czyli element  $x \in X$  o stopniu przynależności do zbioru rozmytego  $A$  równym  $\mu_A(x)$ , natomiast symbol całki oznacza sumę mnogościową. Przedstawiony zapis zbioru rozmytego ma charakter uniwersalny i odnosi się do wszystkich zbiorów rozmytych w przestrzeni  $X$ . Obejmuje więc swoim zakresem również zbiory nieprzeliczalne. W odniesieniu do zbiorów przeliczalnych powyższy zapis można zastąpić następującym:

$$A = \sum_{i=1}^n \mu_A(x_i) / x \tag{2.5}$$

W przypadku rozmytych liczb rzeczywistych, gdy funkcja przynależności stanowi lub jest aproksymowana przez złożenie funkcji liniowych w charakterze singletonów można wykorzystać współrzędne wierzchołków jej wykresu. Dla odróżnienia uzyskanej w ten sposób notacji od jej wyjściowej postaci klasycznej we wspomnianej publikacji [W. Urban 1999] zaproponowano poprzedzanie par takich współrzędnych znakami tyldy. W ten sposób zapis rzeczywistej liczby rozmytej spełniającej warunek o liniowej postaci funkcji przynależności przyjmuje postać zgodną ze wzorem (2.6)

$$A \in N(\mathbf{R}) \Rightarrow A = \sum_{i=1}^n \sim \mu_A(x_i) / x_i \quad x_i, \mu_A(x_i) \in \mathbf{R} \tag{2.6}$$

gdzie  $\mu_A(x)$  oznacza funkcję przynależności liczby  $A$ .

Ze względu na jej liniową postać pomiędzy wierzchołkami wykresu, dla liczb trójkątnych wzór ten można przekształcić do następującej postaci:

$$A \in N(\mathbf{R})_{\Delta} \Rightarrow A = \sum_{i=1}^3 \sim (a_i x_i + b_i) / x_i \quad a_i, b_i, x_i \in \mathbf{R} \tag{2.7}$$

W przetwarzaniu tak określonych rzeczywistych danych rozmytych zostały wykorzystane działania arytmetyki rozmytej zgodnie z definicjami podanymi w pracy [L. A. Zadeh 1975].

**Definicja 2.2.** Zakładając, że  $A$  i  $B \in N(\mathbf{R})$  oraz przyjmując:

a)  $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$  dla operacji dodawania  $A + B \in N(\mathbf{R})$

$$\mu_{A+B}(y) = \sup_{\substack{x_1, x_2 \in \mathbf{R} \\ y = x_1 + x_2}} \min(\mu_A(x_1), \mu_B(x_2)) \forall y \in \mathbf{R} \tag{2.8}$$

b)  $f(x_1, x_2) = x_1 - x_2$  dla operacji odejmowania  $A - B \in N(\mathbf{R})$

$$\mu_{A-B}(y) = \sup_{\substack{x_1, x_2 \in \mathbf{R} \\ y = x_1 - x_2}} \min(\mu_A(x_1), \mu_B(x_2)) \forall y \in \mathbf{R} \quad (2.9)$$

c)  $f(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$  dla operacji mnożenia  $A \cdot B \in N(\mathbf{R})$

$$\mu_{A \cdot B}(y) = \sup_{\substack{x_1, x_2 \in \mathbf{R} \\ y = x_1 \cdot x_2}} \min(\mu_A(x_1), \mu_B(x_2)) \forall y \in \mathbf{R} \quad (2.10)$$

d)  $f(x_1, x_2) = x_1/x_2, x_2 \neq 0$  dla operacji dzielenia  $A/B \in N(\mathbf{R})$

$$\mu_{A/B}(y) = \sup_{\substack{x_1, x_2 \in \mathbf{R} - \{0\} \\ y = x_1/x_2}} \min(\mu_A(x_1), \mu_B(x_2)) \quad \forall y \in \mathbf{R} \quad (2.11)$$

Do ich praktycznej realizacji zastosowano algorytmy numeryczne arytmetyki rozmytej zaprezentowane w opracowaniu [W. Urban 1999]. Było to naturalną konsekwencją zaakceptowanej na potrzeby eksperymentów symulacyjnych wierzchołkowo-liniowej reprezentacji funkcji przynależności liczb rozmytych.

Po wygenerowaniu za pomocą równań różnicowych o postaci zgodnej ze wzorem (2.1), rzeczywiste rozmyte szeregi czasowe były w następnej kolejności poddawane zabiegowi wyostrzania w oparciu o wskaźnik pola pod wykresem funkcji przynależności. Wykorzystano w tym celu poniższy zapis:

$$X \in N(\mathbf{R}) \Rightarrow P_X = \int_{-\infty}^{+\infty} \mu_X(x_X) dx_X, \quad (2.12)$$

który można przekształcić ze względu na przyjęte założenia do postaci

$$P_X = \int_{\alpha}^{\beta} \mu(x_X) dx_X = \sum_{i=1}^2 \left( \int_{y_i}^{y_{i+1}} (a_i x_X + b_i) dx_X \right) \quad (2.13)$$

gdzie  $\alpha$  i  $\beta$  oznaczają końce przedziału wartości, dla których funkcja przynależności rzeczywistej liczby rozmytej przyjmuje wielkości nieujemne oraz poza którym jest równa zero.

### 3. Analiza zmienności pola pod wykresem funkcji przynależności w rozmytych szeregach czasowych

Pierwsze serie przeprowadzonych eksperymentów symulacyjnych zostały ukierunkowane na badanie wpływu zmian parametru  $a$  na wspomniany w poprzedniej części wskaźnik pola pod wykresem funkcji przynależności zmiennej modelu 2.1.

W tym celu modyfikowano w różny sposób przedział zdefiniowania podobnej funkcji, dla wskazanego parametru. Pod wymienionym w poprzednim zdaniu

określeniem należy rozumieć przedział, w którym funkcja przynależności przyjmuje wartości nieujemne, oraz zerowe poza nim. Własność polegająca na możliwości określenia takiego przedziału występuje w przypadku trójkątnych liczb rozmytych, jak też ogólnie w odniesieniu do większości charakterystyk ekonomicznych zdefiniowanych w przestrzeni rozmytych liczb rzeczywistych. Uzyskane przebiegi zmienności pola pod wykresem funkcji przynależności zmiennej  $x_t$  można zezemplifikować za pomocą następujących modeli.

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= (\sim 0/0,7 + \sim 1/0,8 + \sim 0/0,9)x_t + (\sim 0/1 + \sim 1/2 + \sim 0/3) \\ x_0 &= \sim 0/0,9 + \sim 1/1 + \sim 0/1,1 \end{aligned} \tag{3.1}$$

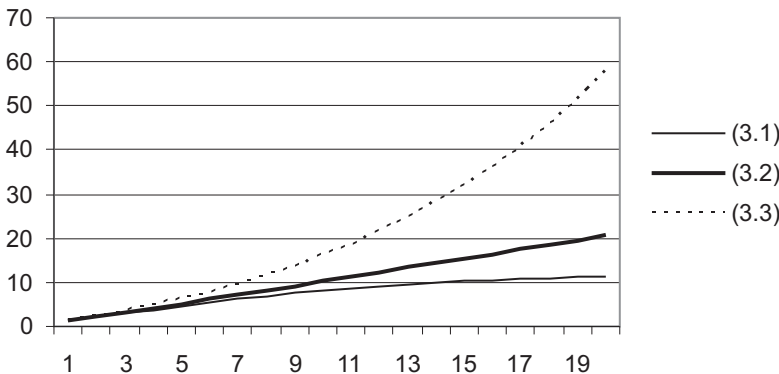
$$\begin{aligned} x_{t+1} &= (\sim 0/0,8 + \sim 1/0,9 + \sim 0/1)x_t + (\sim 0/1 + \sim 1/2 + \sim 0/3) \\ x_0 &= \sim 0/0,9 + \sim 1/1 + \sim 0/1,1 \end{aligned} \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= (\sim 0/0,9 + \sim 1/1 + \sim 0/1,1)x_t + (\sim 0/1 + \sim 1/2 + \sim 0/3) \\ x_0 &= \sim 0/0,9 + \sim 1/1 + \sim 0/1,1 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Wykazują one przede wszystkim zróżnicowanie w zakresie przynależności do przedziału zdefiniowania funkcji przynależności parametru  $a$  wartości większych lub równych jeden. Ilustrację zmienności pola  $P_X$  zmiennej  $x_t$  dla powyższych modeli stanowią wykresy na rysunku 3.1.

Rysunek 3.1

Wykresy zmienności pola pod wykresem funkcji przynależności zmiennej  $x_t$  w kolejnych przebiegach symulacji dla modeli 3.1—3



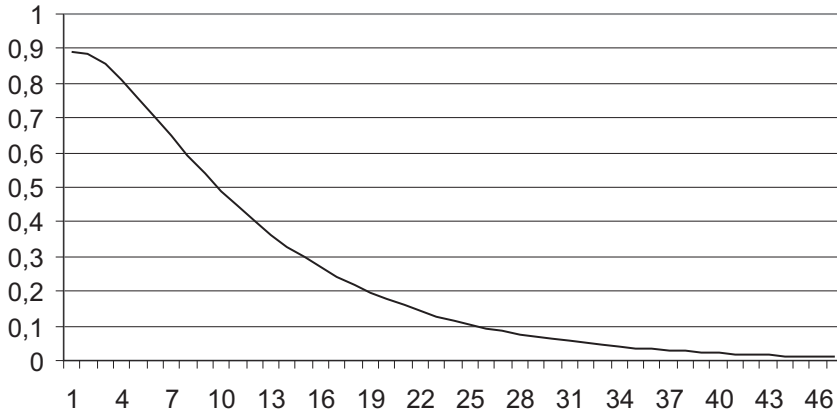
Źródło: opracowanie własne.

Uzyskane wykresy zmian pola pod wykresem funkcji przynależności dla modeli 3.1 i 3.3 dają się aproksymować za pomocą funkcji wykładniczej. Jej parametry można estymować bezpośrednio albo wykorzystując metodę opartą na wy-

znaczeniu empirycznych wartości pierwszych, albo drugich pochodnych  $P_X$ . Wykresy empirycznych wielkości pierwszych pochodnych dla wspomnianych modeli przedstawiają rysunki 3.2 i 3.3.

Rysunek 3.2

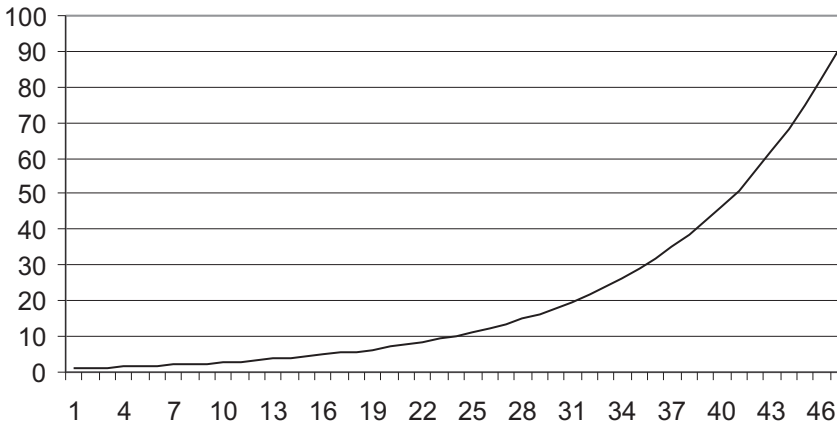
Wykres empirycznych wartości pierwszej pochodnej zmian pola pod wykresem funkcji przynależności zmiennej modelu 3.1 w kolejnych przebiegach symulacji



Źródło: opracowanie własne.

Rysunek 3.3

Wykres empirycznych wartości pierwszej pochodnej zmian pola pod wykresem funkcji przynależności zmiennej modelu 3.3 w kolejnych przebiegach symulacji



Źródło: opracowanie własne.

Ich aproksymacją może być także funkcja wykładnicza występująca w złożeniu z innym odwzorowaniem zgodnie ze wzorem (3.4).

$$P'_{X_t}(t) = e^{f(t)} \quad t \in R \quad (3.4)$$

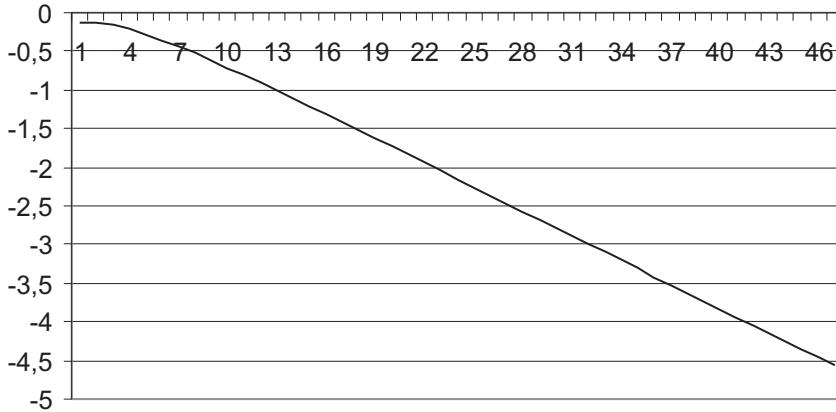
Postać zależności  $f(t)$  można określić poprzez proste przekształcenie:

$$f(t) = \ln P'_{X_i}(t) \quad (3.5)$$

Wykorzystanie powyższego wzoru pozwala na uzyskanie wykresów przebiegów funkcji  $f(t)$  dla każdego z badanych przypadków. Przedstawiają je rysunki 3.4 oraz 3.5.

Rysunek 3.4

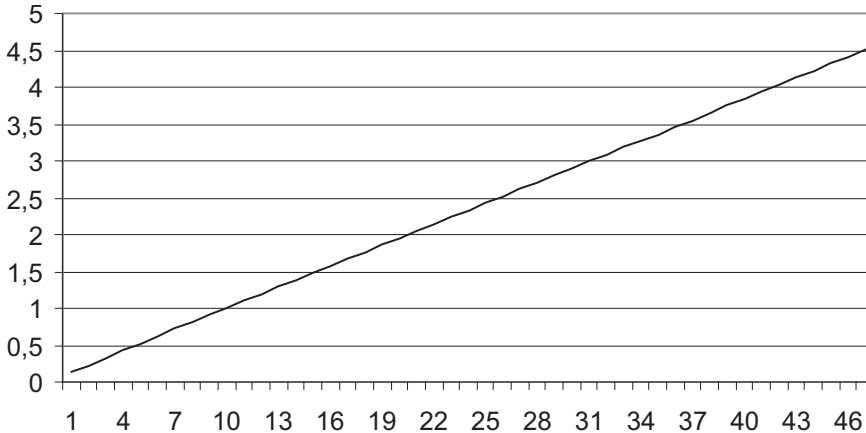
Wykres empirycznych wartości funkcji  $f(t)$  dla modelu 3.1 w kolejnych przebiegach symulacji



Źródło: opracowanie własne.

Rysunek 3.5

Wykres empirycznych wartości funkcji  $f(t)$  dla modelu 3.3 w kolejnych przebiegach symulacji



Źródło: opracowanie własne.

Wynika z nich, jak też z przeprowadzonych badań, że funkcja liniowa jest najczęściej występującym odwzorowaniem, które występuje w złożeniu opisanym wzorem (3.4). Ulega on w związku z tym przekształceniu do poniższej postaci.

$$P'_{X_t}(t) = e^{at+\beta} \quad t \in R \quad (3.6)$$

Po estymacji parametrów wzór ten w odniesieniu do danych otrzymanych za pomocą modeli 3.1 i 3.3 prezentuje się następująco

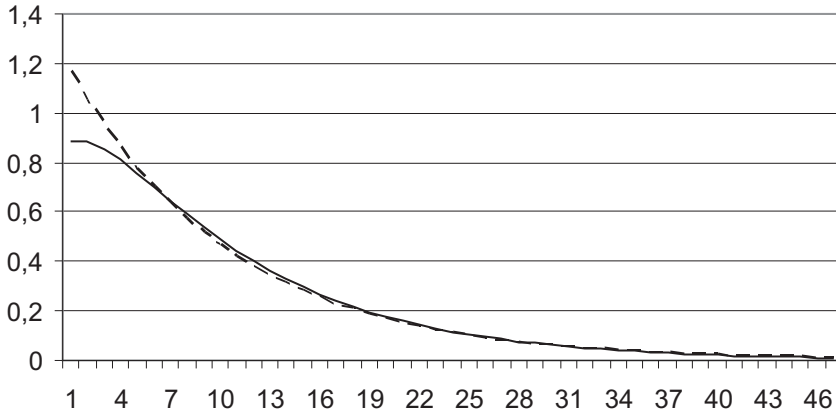
$$P'_{X_t,(3.1)} = e^{-0,10169t+0,356504} \quad (3.7)$$

$$P'_{X_t,(3.3)} = e^{0,094655t-0,04} \quad (3.8)$$

Zależności 3.7 oraz 3.8 pozwalają na obliczenie teoretycznych wartości pierwszych pochodnych, których zestawienie z ich empirycznymi odpowiednikami nie-

Rysunek 3.6

Wykresy empirycznych i teoretycznych wartości pierwszej pochodnej pola pod wykresem funkcji przynależności zmiennej modelu 3.1 w kolejnych przebiegach symulacji



Źródło: opracowanie własne.

zależnie dla każdego z wymienionych modeli przedstawiają rysunki 3.6 oraz 3.7.

Uzyskana w ten sposób aproksymacja pierwszej pochodnej wskaźnika pola pod wykresem funkcji przynależności stanowi podstawę dla zdefiniowania wzoru bezpośrednio na dynamikę pola. W tym celu można skorzystać z zależności

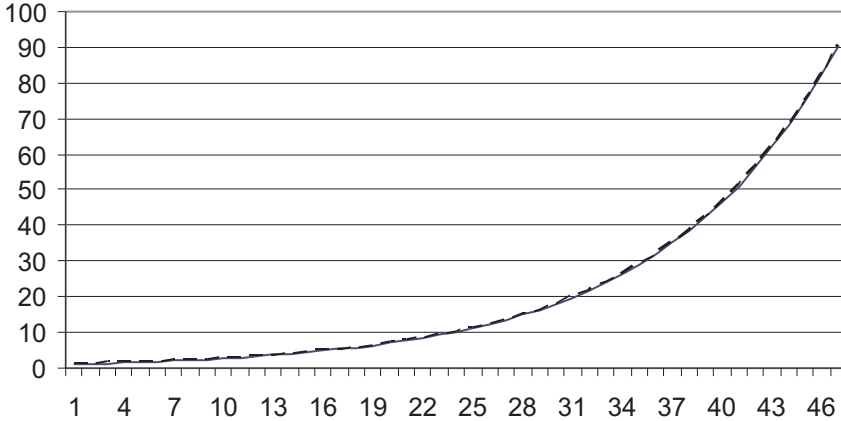
$$P_{X_t}(t) = \int P'_{X_t}(t) dt = \int e^{at+\beta} dt = \frac{1}{\alpha} e^{at+\beta} + C \quad t \in R \quad (3.9)$$

Estymacji stałej  $C$  można dokonać na przykład poprzez porównanie empirycz-



Rysunek 3.7

Wykresy empirycznych i teoretycznych wartości pierwszej pochodnej pola pod wykresem funkcji przynależności zmiennej modelu 3.3 w kolejnych przebiegach symulacji



Źródło: opracowanie własne.

nych wartości pola z ich odpowiednikami teoretycznymi obliczonymi w oparciu o powyższy wzór bez uwzględnienia tej wielkości. Dla potrzeb przykładów prezentowanych w opracowaniu skorzystano z mediany odpowiednich różnic. Uzyskano w ten sposób ostateczne postacie zależności na dynamikę pola pod wykresem funkcji przynależności zmiennej rozmytej  $x_t$  w modelach 3.1 oraz 3.3.

$$P_{X,(3.1)} = -9,83397e^{-0,10169t+0,356504} + 13,34023 \quad (3.10)$$

$$P_{X,(3.3)} = 10,56472e^{0,094655t-0,04} - 10,019 \quad (3.11)$$

Zestawienie wykresów zmienności pola wyznaczonego w oparciu o powyższe wzory z otrzymanym dla danych empirycznych, niezależnie dla każdego z badanych modeli przedstawiają rysunki 3.8 i 3.9.

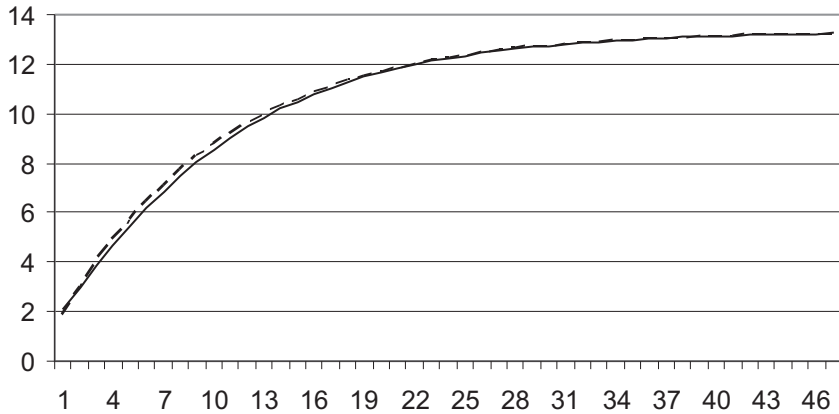
W dalszych eksperymentach symulacyjnych badano wpływ następujących czynników:

- zmiana wartości parametru  $b$ ;
- zwiększanie różnicy pomiędzy dolną granicą zdefiniowania niezerowej części wykresu funkcji przynależności wartości startowej, zmiennej rozmytej  $x_t$  w modelu 3.1, a górną granicą analogicznego przedziału parametru  $a$ .

Jeśli chodzi o zmianę wielkości parametru  $b$  to nie odgrywa ona istotnego wpływu na ogólną tendencję dynamiki pola pod wykresem funkcji przynależności zmiennej rozmytej modelu 2.1. Jako przykład można wskazać rezultaty eksperymentów symulacyjnych z modelem 3.1, w którym przedział zdefiniowania niezerowej części wykresu jego funkcji przynależności był stopniowo modyfikowany. Modyfikacja polegała na zmniejszaniu różnicy pomiędzy sąsiadującymi wartościami

Rysunek 3.8

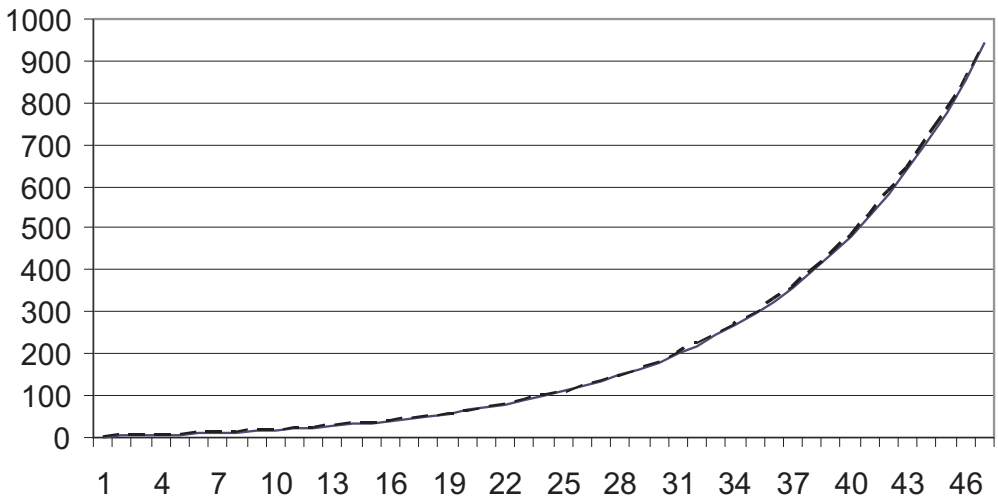
Wykres empirycznych i teoretycznych wartości pola pod wykresem funkcji przynależności zmiennej modelu 3.1 w kolejnych przebiegach symulacji



Źródło: opracowanie własne.

Rysunek 3.9

Wykres empirycznych i teoretycznych wartości pola pod wykresem funkcji przynależności zmiennej modelu 3.3 w kolejnych przebiegach symulacji



Źródło: opracowanie własne.

ciami dziedziny tej funkcji, odpowiadającymi wierzchołkom na jej wykresie. Różnica ta była stopniowa zmniejszana do wielkości bliskich zeru. Otrzymane w wyniku eksperymentów z modelami 3.12—3.15 wykresy przedstawia rysunek 3.10.

$$x_{t+1} = (\tilde{0}/0,7 + \tilde{1}/0,8 + \tilde{0}/0,9)x_t + (\tilde{0}/1 + \tilde{1}/1,9 + \tilde{0}/2,8) \tag{3.12}$$

$$x_0 = \tilde{0}/0,9 + \tilde{1}/1 + \tilde{0}/1,1$$

$$x_{t+1} = (\tilde{0}/0,7 + \tilde{1}/0,8 + \tilde{0}/0,9)x_t + (\tilde{0}/1 + \tilde{1}/1,7 + \tilde{0}/2,4) \tag{3.13}$$

$$x_0 = \tilde{0}/0,9 + \tilde{1}/1 + \tilde{0}/1,1$$

$$x_{t+1} = (\tilde{0}/0,7 + \tilde{1}/0,8 + \tilde{0}/0,9)x_t + (\tilde{0}/1 + \tilde{1}/1,4 + \tilde{0}/1,8) \tag{3.14}$$

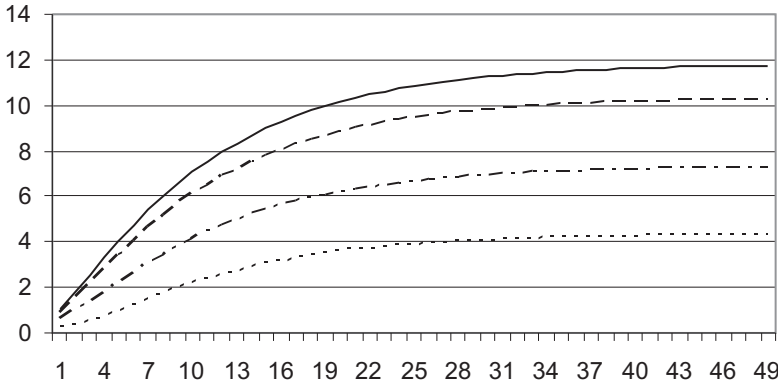
$$x_0 = \tilde{0}/0,9 + \tilde{1}/1 + \tilde{0}/1,1$$

$$x_{t+1} = (\tilde{0}/0,7 + \tilde{1}/0,8 + \tilde{0}/0,9)x_t + (\tilde{0}/1 + \tilde{1}/1,2 + \tilde{0}/1,4) \tag{3.15}$$

$$x_0 = \tilde{0}/0,9 + \tilde{1}/1 + \tilde{0}/1,1$$

Rysunek 3.10

Wykresy zmian pola pod wykresem funkcji przynależności zmiennej rozmytej w kolejnych przebiegach symulacji z modelami 3.12—3.15

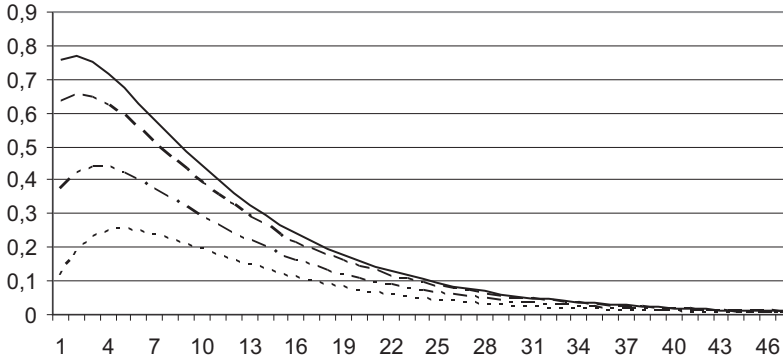


Źródło: opracowanie własne.

Wyraźnie wskazują one na podobny charakter dynamiki do opisywanej wcześniej. Bardziej znaczący wpływ modyfikacji parametru *b* uwidacznia się dopiero na wykresach pierwszych pochodnych wyznaczonych w oparciu o dane empiryczne. Prezentuje to rysunek 3.11. Tym niemniej w każdym z modeli 3.12—3.15 znajduje zastosowanie opisana procedura estymacji wzoru 3.9, służąca w efekcie aproksymacji za jego pomocą dynamiki pola pod wykresem funkcji przynależności badanej zmiennej rozmytej.

Rysunek 3.11

Wykresy wartości pierwszych pochodnych zmian pola pod wykresem funkcji przynależności zmiennej rozmytej w kolejnych przebiegach symulacji z modelami 3.12—3.15, wyznaczonych w oparciu o dane empiryczne



Źródło: opracowanie własne.

Odmierna sytuacja ma jednak miejsce w odniesieniu do drugiego ze wskazanych przypadków.

Przykładem mogą być modele 3.16—3.18.

$$x_{t+1} = (\tilde{0}/0,4 + \tilde{1}/0,5 + \tilde{0}/0,6)x_t + (\tilde{0}/0 + \tilde{1}/1 + \tilde{0}/2) \quad (3.16)$$

$$x_0 = \tilde{0}/2000 + \tilde{1}/2000,1 + \tilde{0}/2000,2$$

$$x_{t+1} = (\tilde{0}/0,4 + \tilde{1}/0,5 + \tilde{0}/0,6)x_t + (\tilde{0}/0 + \tilde{1}/1 + \tilde{0}/2) \quad (3.17)$$

$$x_0 = \tilde{0}/1000 + \tilde{1}/1000,1 + \tilde{0}/1000,2$$

$$x_{t+1} = (\tilde{0}/0,4 + \tilde{1}/0,5 + \tilde{0}/0,6)x_t + (\tilde{0}/0 + \tilde{1}/1 + \tilde{0}/2) \quad (3.18)$$

$$x_0 = \tilde{0}/100 + \tilde{1}/100,1 + \tilde{0}/100,2$$

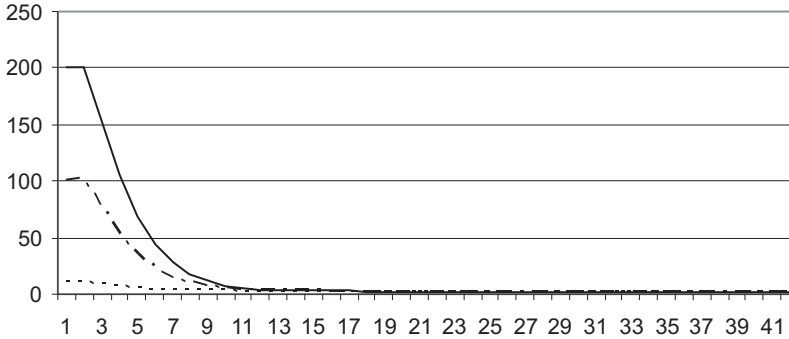
Przebieg zmian pola pod wykresem funkcji przynależności zmiennej rozmytej  $x_t$  dla tych modeli ilustrują wykresy na rysunku 3.12.

Pokazują one jeszcze jedną odmianę dynamiki tego wskaźnika. Do jej aproksymacji konieczne staje się jednak wykorzystanie wartości jego drugich pochodnych obliczonych dla danych pochodzących z eksperymentów symulacyjnych. Jest to następstwem ujemnych empirycznych wartości pierwszej pochodnej pola pod wykresem funkcji przynależności zmiennej rozmytej dla tych modeli. Jako przykład może posłużyć przypadek opisany wzorem (3.16), co ilustruje wykres na rysunku 3.13.

Wykres wartości drugiej pochodnej wskaźnika pola pod wykresem funkcji przynależności zmiennej tego modelu, wyznaczonych w oparciu o rezultaty eksperymentów symulacyjnych prezentuje rysunek 3.14.

Rysunek 3.12

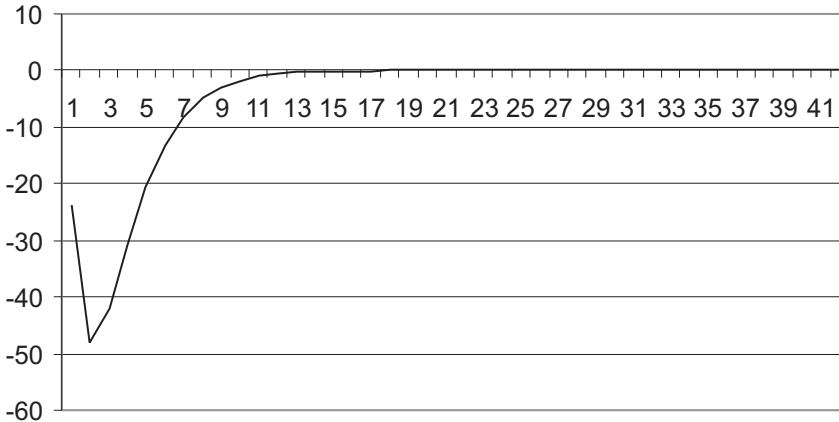
Wykresy dynamiki pola pod wykresem funkcji przynależności zmiennej rozmytej w kolejnych przebiegach symulacji z modelami 3.16—3.18



Źródło: opracowanie własne.

Rysunek 3.13

Wykres wartości empirycznych pierwszej pochodnej pola pod wykresem funkcji przynależności zmiennej modelu 3.16 w kolejnych przebiegach symulacji



Źródło: opracowanie własne.

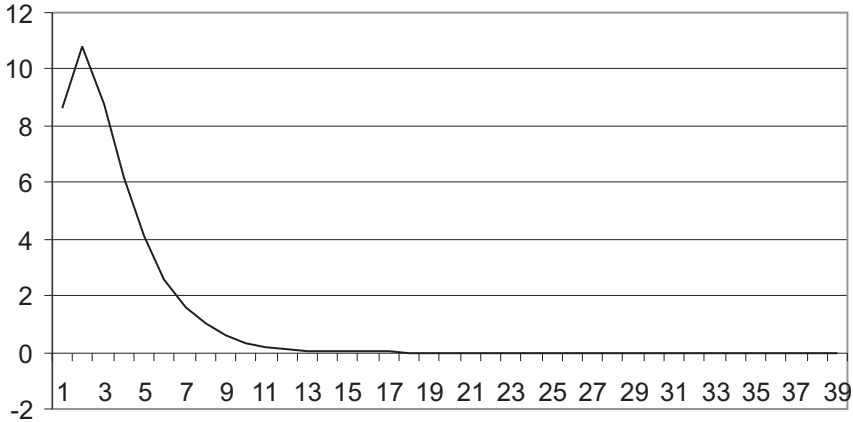
Można go aproksymować za pomocą wzoru 3.6. Wynika to z faktu, że zlogarytmizowane empiryczne wartości drugiej pochodnej odpowiadają w przybliżeniu funkcji liniowej (rysunek 3.15).

Zgodność nie jest jednak tak dokładna, jak w przypadku wcześniej rozważanych przypadków. W rezultacie wzór wykładniczej aproksymacji empirycznych wartości drugiej pochodnej pola pod wykresem funkcji przynależności zmiennej modelu 3.16 przyjmuje postać

$$P''_{X_i} \approx P''_{X_i}(t) = e^{-0,51716t + 5,461463} \tag{3.19}$$

Rysunek 3.14

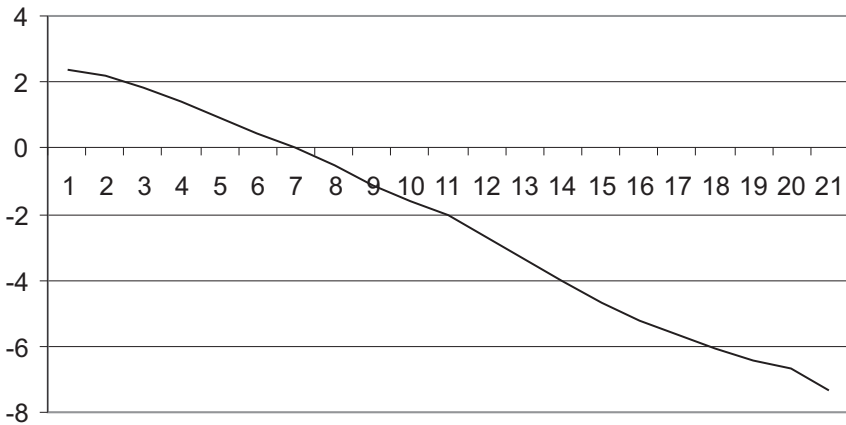
Wykres wartości empirycznych drugiej pochodnej pola pod wykresem funkcji przynależności zmiennej modelu 3.16 w kolejnych przebiegach symulacji



Źródło: opracowanie własne.

Rysunek 3.15

Wykres zlogarytmizowanych wartości empirycznych drugiej pochodnej pola pod wykresem funkcji przynależności zmiennej modelu 3.16 w kolejnych przebiegach symulacji



Źródło: opracowanie własne.

Wykorzystując z kolei zależność 3.9 można otrzymać zapis definiujący aproksymację pierwszej pochodnej

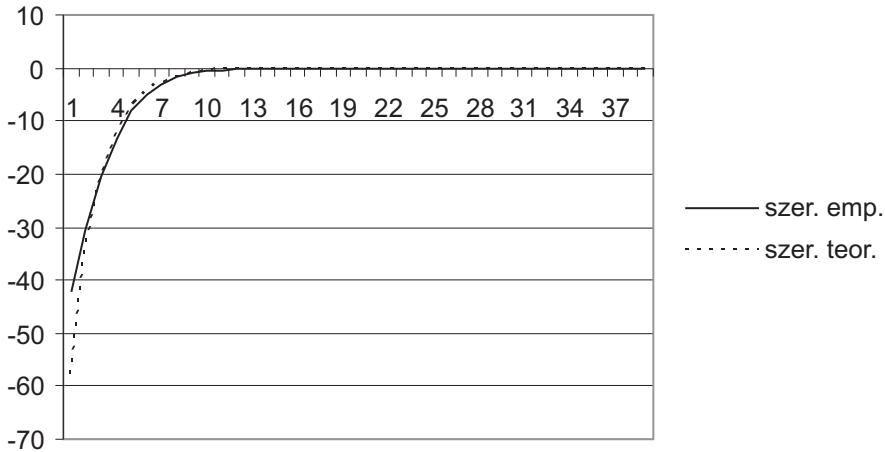
$$P'_{X_t} \approx P'_{X_t}(t) = -1,93364e^{-0,51716t+5,461463} - 3,32082E - 0,7 \quad (3.20)$$

Odpowiedni wykres konfrontacji wartości tej wielkości obliczonych za pomocą

powyższego wzoru oraz danych pochodzących z doświadczenia przedstawia rysunek 3.16.

Rysunek 3.16

Wykresy wartości empirycznych i teoretycznych pierwszej pochodnej pola pod wykresem funkcji przynależności zmiennej modelu 3.16 w kolejnych przebiegach symulacji



Źródło: opracowanie własne.

Uzyskany poziom zbliżności pozwolił na przekształcenie zależności 3.20 do postaci definiującej dynamikę pola pod wykresem funkcji przynależności zmiennej modelu 3.16.

$$P'_{X_t}(t) = \frac{1}{\alpha} e^{at+\beta} + C \quad t \in R \Rightarrow P_{X_t}(t) = \int P'_{X_t}(t) dt = \int \left( \frac{1}{\alpha} e^{at+\beta} + C \right) dt = \frac{1}{\alpha^2} e^{at+\beta} + Ct + D \quad t \in R \tag{3.21}$$

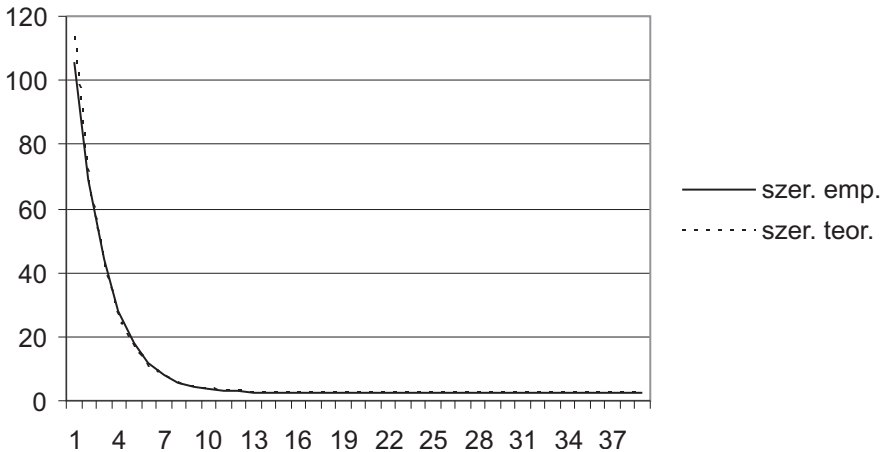
Jak łatwo zauważyć parametry wzoru 3.21 są łatwe do estymacji przy wykorzystaniu podobnej zasady, jak w przypadku zależności 3.9. Tak więc w odniesieniu do modelu 3.16 przyjmuje on ostatecznie postać

$$P_{X_t} \approx P_{X_t}(t) = 3,738975e^{-0,51716t+5,461463} - 3,32082E-07t + 2,486415 \quad t \in R \tag{3.22}$$

Wykres dynamiki teoretycznej (opartej na powyższym wzorze) oraz empirycznej (wynikającej z danych otrzymanych w kolejnych przebiegach eksperymentu symulacyjnego) pola pod wykresem funkcji przynależności zmiennej rozmytej modelu 3.16 zawarty na rysunku 3.17 stanowi pewne potwierdzenie dla prawidłowości dokonanych przekształceń.

Rysunek 3.17

Wykres empirycznych i teoretycznych wartości pola pod wykresem funkcji przynależności zmiennej modelu 3.16 w kolejnych przebiegach symulacji



Źródło: opracowanie własne.

Przeprowadzone dodatkowo badania potwierdziły przydatność wzoru 3.21 oraz procedury jego estymacji także w odniesieniu do wcześniej prezentowanych przypadków, wskazując na jego ogólniejsze znaczenie przynajmniej w odniesieniu do rozważanej klasy modeli matematycznych.

#### 4. Wnioski

Przedstawione w opracowaniu rozważania zostały oparte na licznych eksperymentach symulacyjnych z różnymi modelami wykorzystującymi metody teorii zbiorów rozmytych. Część z nich została wykorzystana w formie przykładów do zilustrowania postawionych w artykule tez. Potwierdzają one przydatność funkcji wykładniczej do aproksymacji dynamiki pola pod wykresem funkcji przynależności zmiennej rozmytej modelu o ogólnej postaci (2.1). Należy przy tym zauważyć na podstawie zaprezentowanych rozważań, że ogólną postać tej zależności najlepiej definiuje wzór (3.21). Dodatkowe eksperymenty, przy rozszerzeniu dziedziny funkcji przynależności dla wszystkich wielkości rozmytych modelu do całej przestrzeni liczb rzeczywistych, również potwierdziły zasadność sformułowanych wniosków. W tych jednak przypadkach liczba uzyskanych danych empirycznych w eksperymentach symulacyjnych była znacznie mniejsza niż w sytuacji nałożonych ograniczeń na dziedzinę tej funkcji. Tym niemniej uzyskana wiedza odnośnie do specyfiki rozmytych szeregów czasowych wygenerowanych w oparciu o znaną z analizy skalarnej zależność liniową pozwala na jej praktyczne zastosowanie. Taką propozycją może być aproksymacja gausso-podobnych funkcji przy-



należności zmiennych rozmytych w eksperymentach symulacyjnych opartych na podobnych jak w opracowaniu zasadach. Należy jednak pamiętać, że pewnym ograniczeniem w tym zakresie jest brak potwierdzenia na drodze analitycznej przedstawionych w artykule tez. Dlatego winny być one weryfikowane symulacyjnie każdorazowo w odniesieniu do konkretnego przypadku.

Dodatkowa konkluzja związana z przedstawionymi w artykule rozważaniami dotyczy możliwości badania na drodze analitycznej szeregów czasowych pierwszej i drugiej pochodnej pola pod wykresem funkcji przynależności zmiennej rozmytej równania różnicowego, otrzymanych w następstwie eksperymentów symulacyjnych. Oprócz ich przydatności dla opisanej procedury aproksymacji wzorów (3.9) oraz (3.21) spełniają one także funkcje badawcze w odniesieniu do dynamiki wspomnianego pola pod wykresem funkcji przynależności zmiennej rozmytej. Należy bowiem pamiętać, że pierwsza pochodna tego wskaźnika stanowi miarę szybkości jego zmian w różnych momentach czasu, podczas gdy druga pochodna informuje z kolei o zmianach tej ostatniej wielkości (szeroko rozumianym przyspieszeniu). W ten sposób znając postać analityczną tych dwóch zależności można wyciągać dalsze wnioski odnośnie do dynamiki procesów rozmytych opisywanych równaniami różnicowymi. Jest to też potencjalnie znacząca dziedzina dla dalszych badań.

## Bibliografia

- Anile A.M., Deodato S., and Privitera G., *Implementing fuzzy arithmetic*, Dipartimento Di Matematica, Università Degli Studi Di Catania, Italy, 1994.
- Chang W. K., Chów L. R., Chang S. K., *Arithmetic operations on level sets of convex fuzzy numbers*, Fuzzy Sets and Systems, 1984.
- Forrester J.W., *Principles of systems*, Industrial Dynamics (MIT Press, Cambridge Mass.), 1968.
- Hanczar P., *Symulowane wyżarzanie — optymalizacja procesów logistycznych [w:] Ekonometria czasu transformacji*, pod red. A.S. Barczaka, WU AE, Katowice 1998.
- Homer J.B., *Why we iterate: scientific modeling in theory and practice*, „System Dynamics Review”, Vol. 12, Spring 1996, 1—19.
- Kaufmann A., Gupta M. M., *Introduction to Fuzzy Arithmetic: Theory and Applications*, New York: Van Nostrand, 1985.
- Klir G.J., Pan Y., *Constrained fuzzy arithmetic: Basic questions and some answers*, Soft Computing 2 (1998), No. 2, 100—108. 7
- Munakata Y., *Fuzzy systems: An Overview Communications of the ACM*, Vol. 37, No 3, March 1994, page 69—76.
- Navara M., Zabokrtsk’y Z.: *Computational problems of constrained fuzzy arithmetic*. In: *The State of the Art in Computational Intelligence*, P. Sinc’ak, J. Vasc’ak, V. Kvasnicka and R. Mesiar (eds.), Physica-Verlag, Heidelberg /New York, 2000, 95—98.
- Resnick R., Halliday D., *Fizyka*, PWN, Warszawa 1973.
- Schuster H. G., *Chaos deterministyczny. Wprowadzenie*, PWN, Warszawa 1995.
- Song Q., Leland R.P. and Chissom B.S., *A new fuzzy time-series model of fuzzy number observations*, Fuzzy Sets and Systems, Vol. 73, August 1995, page 341—348.

- Turksen L. B., *Stochastic Fuzzy Sets*, A Survey Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems series, Vol. 310, Springer 1988, page 168—183.
- Urban W., *Wykorzystanie teorii grawitacji w analizie funkcjonowania systemów społeczno-ekonomicznych*, ZN AE, Kraków 2002.
- Urban W., *Wprowadzenie do skalarnej analizy chaosu deterministycznego w przestrzeni rozmytych liczb rzeczywistych*, ZN AE, Kraków 2001.
- Urban W., *Podstawy rozmytej dynamiki systemowej*, AE, Kraków, 1999.
- Wołoszyn J., Urban W., *Symulacyjna aproksymacja uwarunkowań numerycznych wykorzystania ogólnej teorii grawitacji do opisu relacji społeczno-ekonomicznych*, ZN AE, Kraków 2002.
- Wołoszyn J., Urban W., *Koncepcja filtru aproksymująco-przeskalowującego w działaniach arytmetyki rozmytej*, AE Kraków 2001.
- Wołoszyn J., *Elementy teorii chaosu deterministycznego w badaniach systemów ekonomicznych*, ZN AE nr 551, Kraków 2000.
- Wołoszyn J., *Grafy rozmyte i możliwości ich wykorzystania w ekonomii*, Zeszyty Naukowe AE, Seria specjalna; monografie, nr 90, Kraków 1990.
- Zadeh L.A., *Fuzzy Logic*, Computing with Words, IEEE Transactions on Fuzzy Systems, Vol. 4, May 1996, page 103—111.
- Zadeh L.A., *Fuzzy Sets and their Application to Pattern Classification and Clustering Analysis in [VanRysin1977]*
- Zadeh L.A., *Fuzzy sets*, „Information and Control” 1965, no. 8.
- Zieliński J.S., *Inteligentne systemy w zarządzaniu. Teoria i praktyka*, praca zbiorowa, PWN, Warszawa 2000.